Physikalische Grundlagen

Newton'sche Mechanik

Grundlagen aus dem ersten Semester:
02-Astronomische Maßeinheiten (Seite 16 - 19)
06-Sternarten und Sternentwicklung (Seite 19)
Physikalische Rechenmethoden (Seite 51 - 56, Seite 177 - 183)

Isaac Newton hat etwas geschafft, was vor ihm noch niemand geschafft hat, nämlich sowohl alle Fallgesetze auf der Erde (Newton'sche Gesetze) als auch alle Umlaufgesetze von Planeten (Kepler'sche Gesetze) sowie unzählige andere Gesetze im Zusammenhang mit der Gravitationskraft herzuleiten. Dafür musste er keine physikalischen Gesetze aus Beobachtungen oder Experimenten voraussetzen, sondern verwendete ausschließlich allgemeingültige Definitionen.

Das ist gleich aus mehreren Gründen interessant:

Erstens war man sich dadurch sicher, dass die Newton'schen und Keplerschen Gesetze überall im Universum gelten müssen. Wenn man ein System findet, in dem diese Gesetze nicht gelten, weiß man, dass es eine Masse geben muss, die man nicht gemessen hat. Das ist zum Beispiel beim Nachweis der dunklen Materie relevant.

Zweitens wurde dadurch klar, dass für die Fallbewegungen auf der Erde und für die Bewegungen der Himmelskörper ein und dieselbe Kraft verantwortlich ist, weil die Drehbewegungen in den hergeleiteten Formeln in ausreichender Nähe zu Fallbewegungen werden und umgekehrt. Deshalb spricht man auch von der 1. großen Vereinheitlichung der Physik

Für die Astronomie ist es ganz besonders interessant, weil alle Kräfte abgesehen von der Gravitation keine so große Reichweite haben, um in astronomischen Entfernungen relevant zu sein. Dadurch beschreibt die Newton'sche Mechanik in der Astronomie gleichzeitig auch die gesamte Kraft.

In diesem Skriptum werden wir die Herleitung einiger von Isaac Newton hergeleiteten Gesetze und deren Anwendungsmöglichkeiten nachvollziehen.

1 Die Newton'schen Gesetze

Die Newton'schen Gesetze beschreiben die Eigenschaften einer Kraft. Diese Gesetze gelten für Wechselwirkungen zwischen beliebigen und beliebig vielen Teilchen.

Um die Newton'schen Gesetze so allgemein herleiten zu können, muss man sie zunächst für ein Zweikörpersystem herleiten. Das heißt, man geht davon aus, dass alle Kräfte abgesehen von denen von zwei Teilchen aufeinander vernachlässigbar sind. Erst danach werden wir die Newton'schen Gesetze auch auf Systeme mit beliebig vielen Massen verallgemeinern können.

Herleitung der Newton'schen Gesetze im Zweikörpersystem

2. Newton'sches Gesetz: Die Kraft ist die zeitliche Änderung des Impulses
Aus dem ersten Semester wissen wir, dass der Impuls als Masse mal Geschwindigkeit $p = mv$ definiert ist. Leiten wir das nach der Zeit ab erhalten wir $\dot{p} = ma$ (Die Masse verändert sich nicht mit der Zeit und die Ableitung der Geschwindigkeit ist die Beschleunigung). Das ist wiederum die Definition für die Kraft, also erhalten wir das zweite Newton'sche Gesetz $\dot{p} = F$

1. Newton'sches Gesetz: Wirkt keine Kraft auf ein System, bewegt sich der Körper geradlinig mit der gleichen Geschwindigkeit weiter
Die anderen beiden Newton'schen Gesetze sind in Wirklichkeit nur Spezialfälle des zweiten Newton'schen Gesetzes: Für die Herleitung des ersten Newton'schen Gesetzes, nehmen wir den Spezialfall, dass die Kraft 0 ist ($F = \dot{p} = 0$). Wenn die Kraft 0 ist muss der Impuls als Integral davon eine Konstante sein (im konkreten Fall ein konstanter Vektor) $p = mv = const$. Da die Masse ebenfalls Konstant ist, erhält man durch Division durch die Masse $v = \frac{const}{const} = const$

3. Newton'sches Gesetz: Zu jeder Kraft existiert eine gleich große Gegenkraft in entgegengesetzter Richtung
Für die Herleitung des dritten Newton'schen Gesetzes müssen wir voraussetzen, dass keine Kraft nach außen wirkt. Das dürfen wir, weil wir uns noch immer im Zweikörpersystem befinden. Damit keine Kraft nach außen wirkt, muss die Summe der beiden Kräfte 0 sein ($F_M + F_m = 0$). Durch Subtrahieren von F_m erhaltet man $F_M = -F_m$

Herleitung der Newton'schen Gesetze im Mehrkörpersystem

Nachdem wir uns alle Newton'schen Gesetze im Zweikörpersystem hergeleitet haben, verallgemeinern wir sie auf ein System mit beliebig vielen Körpern (N). Das System ist auch nicht isoliert, dass heißt es können auch Kräfte und Impulse von außen auf das System wirken. Den Gesamtimpuls im System definieren wir als Summe der Impulse (P_T) die auf die einzelnen Teilchen (T) wirken

$$P_{Ges} = \sum_{T=1}^{N} P_T \tag{1.1}$$

Die Impulse der einzelnen Teilchen können auch außerhalb des Systems ausgelöst werden, zählen aber trotzdem zum Gesamtimpuls des Systems.

Analog definieren wir die Äußere Gesamtkraft:

$$F_{Ges} = \sum_{T=1}^{N} F_T \tag{1.2}$$

In dieser Formel kürzen sich alle Kräfte, die innerhalb des Systems bleiben, weg, da wir das Teilchen, das die Kraft auslöst und das Teilchen, auf das die Kraft wirkt, stets als Zweikörperproblem betrachten und wir in diesem System das dritte Kepler'sche Gesetz schon bewiesen haben. Übrig bleiben nur die Kräfte, die nach außen wirken oder von außen ausgelöst werden (daher auch der Name "Äußere Gesamtkraft").

Diese Erkenntnis ist auch deshalb interessant, weil wir dadurch wissen, dass das Verhalten der Körper innerhalb eines Systems sich überhaupt nicht auf das Verhalten des Gesamtsystems auswirkt. Es wäre beispielsweise vollkommen egal, wenn sich die Planeten in unserem Sonnensystem anders bewegen würden, das gesamte System bewegt sich dennoch in die gleiche Richtung.

Um das zweite Newton'sche Gesetz zu beweisen, setzen wir die zeitliche Ableitung des Gesamtimpuls und die äußere Gesamtkraft des Systems gleich.

$$\dot{p}_{Ges} = F \tag{1.3}$$

$$\frac{\sum_{T=1}^{N} P_T}{dt} = \sum_{T=1}^{N} F_T \tag{1.4}$$

Auf der linken Seite kann man die Summenregel anwenden und jedes Summenglied einzeln nach der Zeit ableiten. Nach dieser Umformung steht auf beiden Seiten das gleiche:

$$\sum_{T=1}^{N} F_T = \sum_{T=1}^{N} F_T \tag{1.5}$$

Damit haben wir das zweite Newton'sche Gesetz auch in beliebig vielen Koordinaten bewiesen. Das erste und das dritte Newton'sche Gesetz können wir analog wie im Zweikörpersystem als Spezialfall des zweiten Newton'schen Gesetzes herleiten.

2 Der Schwerpunkt

Der Schwerpunkt soll jener Punkt sein, an dem die Gravitation (also die Gesamtkraft des Systems) am stärksten wirkt. ($F = ma = max$.). Um festzustellen, wo das der Fall ist, müssen wir die Ableitung der Kraft gleich 0 setzen.($m\dot{a} = 0$). Diese Formel kann man durch die Masse dividieren und erhält so $\dot{a} = 0$. Um den Ort des Schwerpunktes zu erhalten, müssen wir diese Formel mehrmals integrieren.

Nach der ersten Integration erhält man $a = const$: Wäre die Konstante größer 0, müsste ohne Einwirkung von äußeren Kräften der Schwerpunkt und mit ihm auch die anderen Körper des Systems immer schneller werden und irgendwann die Lichtgeschwindigkeit überschreiten (Das ist bei den großen Abständen zwischen den Galaxien nicht einmal so unwahrscheinlich). Wäre die Konstante kleiner 0 würde dasselbe nur in entgegengesetzter Richtung passieren. Die Konstante muss also gleich 0 sein ($a = 0$).

Noch interessanter wird diese Erkenntnis, wenn man sie in die Formel für die Kraft $F = ma$ einsetzt, dann erhält man nämlich $F = 0$ (Wir haben bei unserer Extremwertaufgabe offensichtlich statt einer Maximalstelle eine Minimalstelle gefunden). Würde man einen Körper in diesen Punkt setzen, würde er genau dort bleiben, weil sich alle Kräfte ausgleichen. Das entspricht den Lagrangepunkten.

Laut dem 3. Keplerschen Gesetz ist die Gesamtkraft genau dann 0, wenn alle Kräfte des Systems in diesem Punkt wirken. Da nun doch die meisten Kräfte in diesem Punkt wirken (auch wenn sie sich ausgleichen und deshalb 0 ergeben) ist das eine sinnvolle Definition für den Schwerpunkt. Die Schwerpunkte des Systems sind also genau dort, wo auch die Lagrangepunkte sind.

Diese Erkenntnis ist aber vor allem aus einem anderen Grund nützlich: Rechnet man nur mit der Gesamtkraft des Systems, kann man auch stellvertretend für das System nur den Schwerpunkt verwenden. Das wird bei der Herleitung der Kepler'schen Gesetze noch sehr nützlich sein.

Durch erneute Integration erhält man $v = const$. Das heißt, dass sich alle Schwerpunkte bzw. Lagrangepunkte von jedem System mit geradliniger und gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen.

3 Rotationen

In der Astronomie kommen fast nur Rotationsbewegungen vor: Die Monde rotieren um die Planeten, die Planeten um die Sterne, die Sterne um die Galaxiezentren und die Galaxien umeinander. Es ist also sinnvoll unsere Maßeinheiten auch in Bezug auf die Rotationsbewegungen zu definieren.

Beispielsweise kann es interessant sein, die Geschwindigkeit nicht in Meter pro Sekunde, sondern in Umdrehungen pro Sekunde oder in der kleineren Einheit Bogenmaß pro Sekunde anzugeben. Dabei wird die Einheit Meter einfach durch die Einheit Bogenmaß ersetzt. Analog können wir das für alle anderen Einheiten, die über die Entfernung definiert werden, durchführen:

Ort	x	m	Winkel	ϕ	rad
Geschwindigkeit	$\vec{v}$	$\frac{m}{s}$	Winkelgeschwindigkeit	$\vec{\omega}$	$\frac{rad}{s}$
Beschleunigung	$\vec{a}$	$\frac{m}{s^2}$	Winkelbeschleunigung	$\vec{\alpha}$	$\frac{rad}{s^2}$
Kraft	$\vec{F}$	$N = \frac{kgm}{s^2}$	Drehmoment	$\vec{M}$	$Nm = \frac{kgrad}{s^2}$
Impuls	$\vec{p}$	$Ns = \frac{kgm}{s}$	Drehimpuls	$\vec{L}$	$Nms = \frac{kgrad}{s}$

Im ersten Semester haben wir uns überlegt, dass $l = rx\phi$. Da wir auch in den anderen Rotationseinheiten die Länge durch die Bogenlänge ersetzen, geht das dort analog. Im ersten Semester haben wir uns das für $\vec{v} = rx\vec{\omega}$ überlegt, mit der gleichen Überlegung kommen wir aber auch auf $\vec{a} = rx\vec{\alpha}$, $\vec{F} = rx\vec{M}$ und $\vec{p} = rx\vec{L}$.

Auch die zeitliche Ableitung funktioniert in den Rotationseinheiten analog, weil der Radius eine Konstante ist und daher nur die Einheit nach der Multiplikation abgeleitet werden muss. Leiten wir Beispielsweise $\vec{\omega} = \frac{\vec{v}}{r} = \frac{1}{r}\vec{v}$ ab, erhalten wir $\frac{1}{r}\dot{\vec{v}} = \frac{1}{r}\vec{a} = \frac{\vec{a}}{r} = \vec{\alpha}$. Analog geht die Überlegung auch für $\dot{\phi} = \vec{\omega}$, $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ und $\ddot{\phi} = \vec{\alpha}$. Bei der letzten Formel wendet man die Überlegung zweimal an.

Das Gesetz $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ ist analog zum 2. Kepler'schen Gesetz für Rotationseinheiten. Man kann dadurch analog wie bei den normalen Einheiten, das 1. Newton'sche Gesetz ($M = 0 \Rightarrow \omega = const$) und das 3. Newton'sche Gesetz ($M_{12} = -M_{21}$) als Spezialfälle des 2. Newton'schen Gesetzes für Zweikörpersysteme herleiten.

Die Verallgemeinerung auf Mehrkörpersysteme funktioniert ebenso analog: Man definiert das Gesamtdrehmoment analog zur Äußeren Gesamtkraft

$$M_{Ges} = \sum_{T=1}^{N} M_T \tag{3.1}$$

als Summe aller Drehmomente des Systems und den Gesamtdrehimpuls analog zum Gesamtimpuls

$$L_{Ges} = \sum_{T=1}^{N} L_T \tag{3.2}$$

als Summe aller Drehimpulse des Systems. Das Gesamtdrehmoment ist die Ableitung vom Gesamtdrehimpuls, weil die Ableitung vom Drehimpuls der einzelnen Teile den Drehmomenten der einzelnen Teile entspricht und das laut Summenregel auch für die Summe davon gelten muss.

Wenn auf das System keine äußeren Kräfte wirken, kann man sich das Gesamtdrehmoment eines Systems ausrechnen: Die Richtungsvektoren sind parallel zu den Kräften, weil beide Richtung Schwerpunkt zeigen. In diesem Fall wird das Kreuzprodukt und damit auch das Drehmoment Null. Das Gesamtdrehmoment ist dann als Summe aller Drehmomente ebenfalls Null. Der Gesamtdrehimpuls muss als Integral des Gesamtdrehmoments konstant sein, der Gesamtdrehimpuls eines abgeschlossenen Systems bleibt also immer erhalten. Analog zur Impulserhaltung gilt also auch die Drehimpulserhaltung.

Da sowohl der Radius als auch der Impuls in der Bahnebene liegen, und der Drehimpuls als Kreuzprodukt zwischen Radius und Impuls definiert ist, muss dieser im rechten Winkel auf die Bahnebene stehen. Aus der Drehimpulserhaltung folgt, dass der Vektor, der im rechten Winkel auf die Bahnebene steht, konstant ist, folglich müssen die Objekte in einer Bahnebene bleiben.

4 Das Newton'sche Gravitationsgesetz

Das Newton'sche Gravitationsgesetz ist wohl eines der fundamentalsten Gesetze, weil man damit beinahe alle Effekte der Gravitation beschreiben kann. In diesem Abschnitt wollen wir uns das Newton'sche Gravitationsgesetz und einige Anwendungen herleiten.

Herleitung des Newton'schen Gravitationsgesetzes

Die Masse ist über die Fallbeschleunigung definiert: Je größer die Masse, desto höher die Fallbeschleunigung, die sie auslöst. Da die Fallbeschleunigung am Massenpunkt immer 0 ist (in welche Richtung soll sie dort auch beschleunigt werden) definieren wir die Masse über die Fallbeschleunigung in einem Meter Entfernung. Hier gilt

$$M = \frac{a(1)}{G} \tag{4.1}$$

wobei a die Fallbeschleunigungund G die Gravitationskonstante $(6,67x10^{-11}\frac{kgm}{s^2})$ ist. Diese Konstante kommt dadurch zustande, dass die Masse in Kilogramm aber die Beschleunigung in der davon unabhängigen Einheiten $\frac{m}{s^2}$ gemessen wird.

Jetzt kann man sich natürlich die Frage stellen, woher die eine Masse die Information bekommt, dass es eine andere Masse gibt, die sie anzieht. Man vermutet, dass es Austauschteilchen gibt, die die Gravitationskraft übertragen.

Für drei der vier fundamentalen Wechselwirkungen der Physik (die starke Kernkraft, die schwache Kernkraft und die elektromagnetische Wechselwirkung) hat man solche Austauschteilchen bereits nachgewiesen. Bei der Gravitationskraft wurde noch kein derartiges Objekt entdeckt, sie verhält sich physikalisch jedoch auch so, als würden diese Austauschteilchen existieren.

Die Idee hinter der Theorie der Austauschteilchen ist, dass jedes massebehaftete Teilchen Austauschteilchen, bei der Gravitation nennt man sie Gravitonen, in alle Richtungen aussendet. Je mehr Masse es hat, desto mehr Gravitonen sendet es pro Sekunde aus und desto stärker ist die Fallbeschleunigung. Mit der Entfernung nimmt die Fallbeschleunigung ab, weil sich die Gravitonen immer stärker verteilen.

Um eine radiusabhängige Formel für die Fallbeschleunigung herzuleiten, betrachten wir Flächen, welche die Masse zur Gänze umschließen. Durch diese müssen alle ausgesanten Gravitonen durchfließen, es wirkt auf sie also stets die gleiche Gravitation. Diesen Sachverhalt bezeichnet man als Gaußsches Gesetz.

Wir betrachten den Gaußschen Satz für Hohlkugeln, in dessen Mittelpunkt die Masse ist. Da die Masse annähernd kugelförmig ist, befindet sich jede Stelle außerhalb der Masse an der Oberfläche so einer Hohlkugel und man kann mit diesen die Fallbeschleunigung an jeder Stelle beschreiben.

Die Formel für die Oberfläche einer Kugel ist $4r^2\pi$, folglich nimmt die Fallbeschleunigung mit $\frac{1}{r^2}$ nach außen hin ab. Die Fallbeschleunigung beim Radius 1 erhält man durch Umformung von (4.1.) nach der Fallbeschleunigung

$$a(1) = GM \tag{4.2}$$

Um die Fallbeschleunigung bei allen Radien auszurechnen, müssen wir die $\frac{1}{r^2}$-Abhängigkeit in die Formel einbeziehen

$$a(r) = \frac{GM}{r^2} \tag{4.3}$$

Um sich aus der Fallbeschleunigung die Gravitationskraft auszurechnen, muss man die Formel mit der Masse multiplizieren (denn Kraft ist Masse mal Beschleunigung). Man erhält das Newton'sche Gravitationsgesetz

$$F = \frac{GMm}{r^2} \tag{4.4}$$

Da auch alle anderen Kräfte mit Austauschteilchen übertragen werden, gelten für alle kugelförmigen Kraftquellen analoge Gesetze. Beispielsweise ist die Formel für das Coulomb'sche Gesetz zur Übertragung der elektromagnetischen Wechselwirkung

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2} \tag{4.5}$$

mit der Proportionalitätskonstante $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

Anwendungen des Newton'sche Gravitationsgesetz

Das Newton'sche Gravitationsgesetz ist ein gutes Beispiel, für die Vereinheitlichung, die Newton erreicht hat, denn man kann sie sowohl auf Fallbewegungen auf einem Himmelskörper als auch auf Drehbewegungen der Himmelskörper umeinander anwenden. Das wollen wir im Folgenden anhand von ein paar Beispielen vorzeigen.

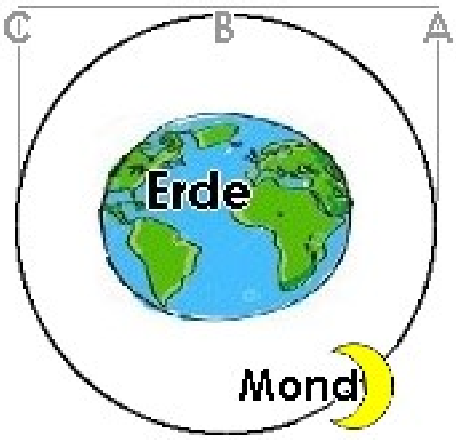
Anwendung für die Fallbeschleunigung auf der Erde
In dem Fall setzt man in Formel 4.3. für M die Masse der Erde, und für r den Erdradius ein (wir gehen davon aus, dass die Fallhöhe vernachlässigbar klein im Vergleich zum Erdradius ist). So erhält man die Fallbeschleunigung von $10\frac{m}{s^2}$

Diese Fallbeschleunigung wirkt ausschließlich in z-Richtung, die Geschwindigkeit in x-Richtung und in y-Richtung bleibt laut dem 1. Newton'schem Gesetz konstant.

Anwendung für Bewegungen von Himmelskörpern in Gravitationsfeldern
In der letzten Anwendung sind wir davon ausgegangen, dass die Fallbeschleunigung ausschließlich in z-Richtung (Richtung Gravitationszentrum) geht. In dieser Anwendung müssen wir dafür die r-Koordinate verwenden, weil die Himmelskörper während dem Fall eine so große Distanz zurücklegt, dass sich die Richtung der Fallbeschleunigung ändert.

Beim fallenden Gegenstand haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass er sich in Richtung des Erdmittelpunktes bewegt. Das Newton'sche Gravitationsgesetz besagt jedoch nur, dass die Bewegung in Richtung des Erdmittelpunktes beschleunigt wird. Das trifft auch beispielsweise auf eine Kreisbewegung zu, bei der die gewöhnliche geradlinige Bewegung (die laut 1. Newton'schen Gesetz ohne Einwirkung von Kräften dominieren würde) in Richtung der Gravitationsquelle abgelenkt (also beschleunigt) wird.

Dass es sich bei der Kreisbewegung um eine Bewegung handelt, die in Richtung des Mittelpunkts beschleunigt wird, wird in kartesischen Koordinaten auch dadurch klar, dass jede beliebige Koordinate in Richtung Mittelpunkt beschleunigt wird. In dieser Grafik wird das am Beispiel der x-Koordinate der Umlaufbahn des Mondes um die Erde erklärt.



Am Punkt A hat der Mond eine Geschwindigkeit von $0\frac{m}{s}$, weil die gesamte Geschwindigkeit in y-Richtung geht. Dann beschleunigt der Mond so lange, bis es in Punkt B in x-Richtung den Mittelpunkt erreicht hat. Dort ist er am schnellsten, weil die gesamte Geschwindigkeit in x-Richtung geht. Dann wirkt die gleiche Beschleunigung in die andere Richtung, sodass die Geschwindigkeit im Punkt C wieder Null ist.

Dieses Beispiel zeigt auch eine weitere Anwendung der Rotationseinheiten: Bei der gleichförmigen Kreisbewegung ist zwar die Beschleunigung nicht konstant, wohl aber die Winkelbeschleunigung. Diese wird zwar in $\frac{rad}{s}$ angegeben, funktioniert also auch nur in einer Dimension, aber dafür in Richtung der gekrümmten ϕ-Koordinate, anstatt in Richtung der geraden kartesischen Koordinaten. Da sich der Mond näherungsweise entlang der ϕ-Koordinate mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit bewegt, ist seine Winkelbeschleunigung 0.

Es ist also anschaulich klar, dass wir nur die Richtung der Beschleunigung, nicht aber die Richtung der Bewegung kennen.

Um die Richtung der Bewegung anzugeben, spalten wir 4.3. in Koordinaten auf. Damit die Beschleunigung nur in eine Koordinatenrichtung geht, verwenden wir Polarkoordinaten, wobei die Bahnebene die Polarebene und die Sonne im Zentrum ist.

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{GM}{r^2} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Man könnte jetzt auf die Idee kommen a_r als $\ddot{r}$ und a_θ als $\ddot{\theta}$ anzugeben um so das Differentialgleichungssystem nach r zu lösen. In Polarkoordinaten ist das jedoch nicht richtig, weil sich die Richtung der r-Koordinatenlinien in Abhängigkeit von der θ-Koordinatenlinie ändern und umgekehrt.

Beispielsweise ändert sich die Radiuskomponente, während man sich auf einer Kreisbahn mit konstantem Radius bewegt: Der Betrag bleibt zwar stets der gleiche, aber die Richtung ändert sich mit dem Winkel. Um dieses Problem zu umgehen, muss man die Radiuskomponente in den winkelunabhängigen Teil |r| und den nur vom Winkel abhängigen Einheitsvektor $\vec{e_r}$ aufteilen

$$\vec{r} = |r|\vec{e_r} \tag{4.7}$$

wobei man die Änderung des winkelabhängigen Einheitsvektors immer in der Winkelkoordinate ausdrücken muss. Um auf die Beschleunigung zu kommen, muss man die Formel 4.7. zwei mal nach der Zeit ableiten. Nach der ersten Ableitung erhält man mit Hilfe der Produktregel

$$\dot{\vec{r}} = |\dot{r}|\vec{e_r} + |r|\dot{\vec{e_r}} \tag{4.8}$$

Die zeitliche Änderung von $\vec{e_r}$ entspricht genau der zeitlichen Änderung des Winkels in Richtung des Winkels. Es gilt also

$$\dot{\vec{e_r}} = |\dot{\theta}|e_\theta \tag{4.9}$$

Einsetzen von 4.9. in 4.8. ergibt

$$\dot{\vec{r}} = |\dot{r}|\vec{e_r} + |r||\dot{\theta}|e_\theta \tag{4.10}$$

Diese Formel kann man nochmal ableiten um auf die Beschleunigung zu kommen. Man erhält damit

$$\ddot{\vec{r}} = |\ddot{r}|\vec{e_r} + |\dot{r}|\dot{\vec{e_r}} + |\dot{r}||\dot{\theta}|\vec{e_\theta}| + |r||\ddot{\theta}|\vec{e_\theta} + |r||\dot{\theta}|\dot{\vec{e_\theta}} \tag{4.11}$$

Die Änderung von $\vec{e_\theta}$ entspricht genau der negativen zeitlichen Änderung des Winkels in Richtung der Radiuskomponente. Es gilt also

$$\dot{\vec{e_\theta}} = -|\dot{\theta}|\vec{e_r} \tag{4.12}$$

Einsetzen von 4.9. und 4.12. in 4.11. ergibt

$$\ddot{\vec{r}} = |\ddot{r}|\vec{e_r} + |\dot{r}||\dot{\theta}|e_\theta + |\dot{r}||\dot{\theta}|\vec{e_\theta}| + |r||\ddot{\theta}|\vec{e_\theta} - |r||\dot{\theta}||\dot{\theta}|\vec{e_r} \tag{4.13}$$

Durch Ausmultiplizieren der Beträge mit den Einheitsvektoren kann man die Beschleunigung wieder in Vektorschreibweise angeben

$$\ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

Diesen Vektor kann man in die Formel 4.6. einsetzen

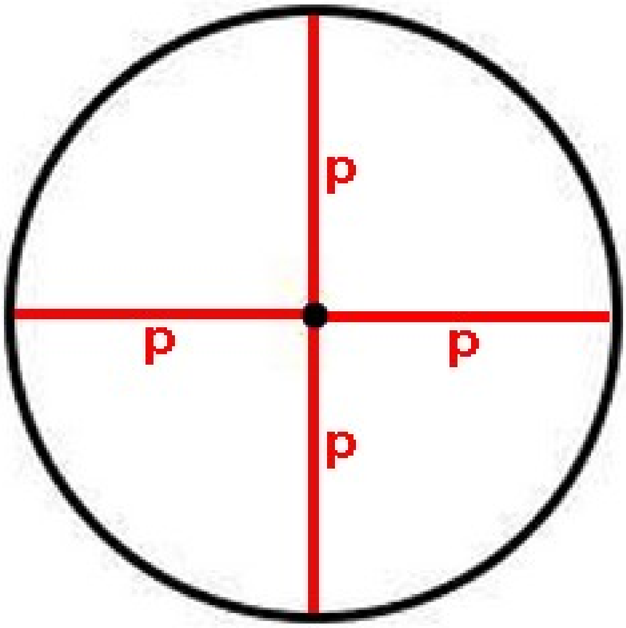
$$\begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{GM}{r^2} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

Jetzt hat man zwei Differentialgleichungen (eine für die r-Koordinate und eine für die θ-Koordinate). Man kann dieses Differentialgleichungssystem so lösen, dass der Radius in Abhängigkeit vom Winkel dargestellt wird.

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + ecos\phi} \tag{4.16}$$

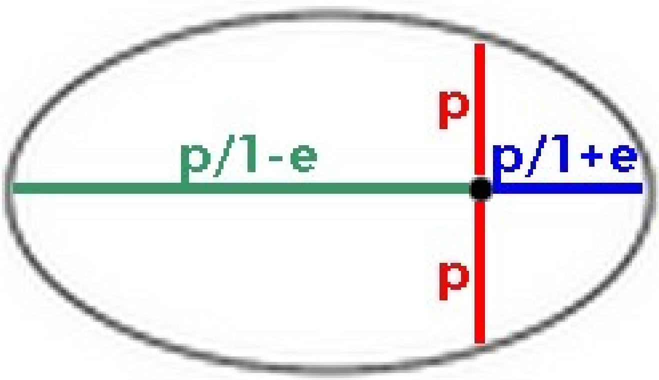
In dieser Formel sind p und e Integrationskonstanten. Um uns vorstellen zu können, welche Form die Kurve hat setzen wir für die Konstante e unterschiedliche Werte ein. Bei $\phi = 90°$ und bei $\phi = 270°$ nimmt r immer den Wert p ein, weil dort e mit 0 multipliziert wird.

Zunächst beginnen wir mit dem einfachsten Fall, dem das e gleich 0 ist. In dem Fall vereinfacht sich die Formel zu r(ϕ)=p. Der Radius ist also unabhängig vom Winkel immer konstant, das entspricht einer Kreisbahn.



Eine exakte Kreisbahn kommt in der Natur nicht vor, weil es unendlich unwahrscheinlich ist, dass e genau den Wert 0 annimmt. Bei vielen Planeten, Zwergplaneten und Monden ist e jedoch fast 0, so dass man deren Bahn als Kreisbahn nähern kann.

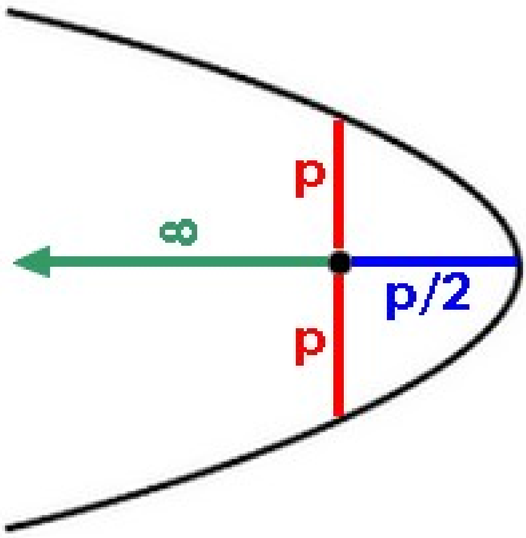
Wenn man für e einen Wert zwischen 0 und 1 einsetzt, schwankt der Radius zwischen $\frac{p}{1+e}$ (für $\phi = 0°$) und $\frac{p}{1-e}$ (für $\phi = 180°$). Das entspricht der Bahn einer Ellipse.



Alle Planeten und Zwergplaneten kreisen in Ellipsenbahnen um die Sonne und die Monde kreisen in Ellipsenbahnen um ihre Planeten

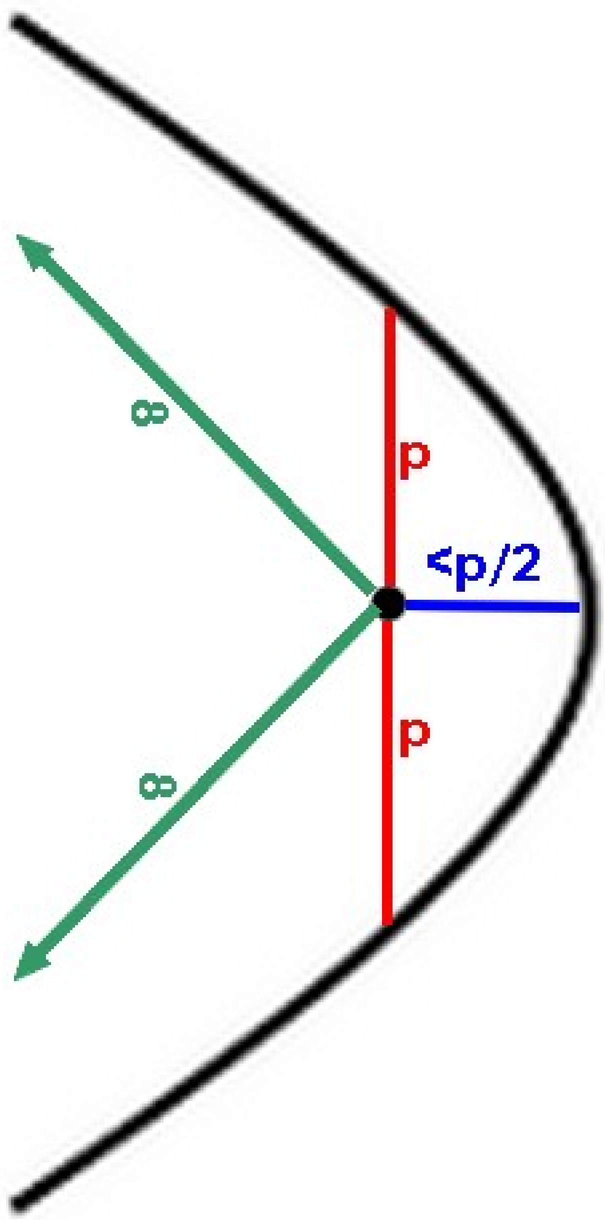
Wenn man für e den Wert 1 einsetzt, ist der kleinstmögliche Radius $\frac{p}{2}$ und wird bei

$\phi = 0°$ erreicht. Für $\phi = 180°$ divergiert der Wert gegen ∞, dieser Punkt der Bahn wird folglich nicht erreicht. Jeder Winkel davor und danach wird erreicht, wobei der Radius unendlich groß werden kann. Das entspricht der Bahn einer Parabel.



Auch diese Bahn kommt in der Natur nicht vor, weil die Wahrscheinlichkeit das e genau 1 ist, unendlich unwahrscheinlich ist. Bei vielen Kometen ist e jedoch fast 1, sodass ihre Bahn in Sonnennähe mit der Bahn einer Parabel genähert werden kann und sie ihren entferntesten Punkt erst in der Oort'schen Wolke erreichen.

Wenn man für e einen Wert einsetzt, der größer als 1 ist, ist der kleinstmögliche Radius kleiner als $\frac{p}{2}$. Für einen Winkel zwischen $\phi = 90°$ und $\phi = 180°$ und für einen Winkel zwischen $\phi = 180°$ und $\phi = 270°$ divergiert der Wert gegen ∞, alle Winkel dazwischen werden folglich nicht erreicht. Das entspricht der Bahn einer Hyperbel.



Alle nichtperiodischen Kometen bewegen sich auf Hyperbelbahnen.

Anwendung für die Drehbewegung um die Erde

In dem Fall setzt man in 4.6. für M die Masse der Erde, für m die Masse des Mondes und für r der Abstand zwischen Erde und Mond (in dem Fall können wir Erdradius und Mondradius im Vergleich zum Gesamtabstand vernachlässigen) ein. Außerdem betrachten wir die Mondbahn näherungsweise als Kreisbahn, sodass wir immer denselben Abstand verwenden können.

Am Beginn rechnen wir uns die Beschleunigung analog wie beim ersten Beispiel aus, wobei wir auch hier die vom Mond ausgelöste Bewegung der Erde vernachlässigen.

$$a = G\frac{M}{r^2} = 0,003\frac{m}{s^2} \tag{4.17}$$

Damit haben wir die Fallbeschleunigung des Mondes in r-Richtung. Da wir wissen, dass die Winkelbeschleunigung des Mondes 0 ist und er sich auf einer näherungsweisen Kreisbahn befindet, kann man sich daraus die Geschwindigkeit des Mondes ausrechnen.

Dafür betrachten wir zunächst das Verhältnis zwischen der Geschwindigkeit in x-Richtung und der Winkelgeschwindigkeit

$$v_x = \omega r cos\phi \tag{4.18}$$

Beim Ableiten sind Radius und Winkelgeschwindigkeit Konstanten, die Ableitung des Winkels ist die Winkelgeschwindigkeit

$$a_x = \omega^2 r sin\phi \tag{4.19}$$

Für die y-Koordinate kann man das analog durchführen. Das Ergebnis ist wie erwartet um einen Viertelkreis (Winkel $\frac{\pi}{2}$) im Vergleich zur x-Achse verschoben.

$$a_y = \omega^2 r cos\phi \tag{4.20}$$

Um den Betrag der Beschleunigung auszurechnen, verwenden wir $|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

$$|a| = \sqrt{\omega^4 r^2 (cos^2\phi + sin^2\phi)} \tag{4.21}$$

Mit Hilfe der Beziehung $cos^2(\phi) + sin^2(\phi) = 1$ lässt sich das Ergebnis vereinfachen:

$$a = \omega^2 r \tag{4.22}$$

Für die Winkelgeschwindigkeit kann man $\omega = vxr$ einsetzen und erhält so

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{4.23}$$

Um sich die Geschwindigkeit des Mondes auszurechnen, müssen wir die Formel nur noch nach v umstellen und Beschleunigung sowie Radius einsetzen.

$$v = \sqrt{ra} = 1.153.200\frac{m}{s} = 4.151.520\frac{km}{h} \tag{4.24}$$

Das ist eine beeindruckende Geschwindigkeit: Damit würde man in nur einer Sekunde von Wien bis nach Paris kommen.

Anwendung für die Exoplanetenforschung
Exoplaneten sind sehr weit weg und werden von ihrem Stern überstrahlt, daher kann man nur sehr wenige Informationen durch direkte Beobachtung herausfinden. Dementsprechend hilfreich ist jede Formel, die ganz ohne Beobachtung Daten über einen Exoplaneten verrät. Auch das Newton'sche Gravitationsgesetz ist dabei eine große Hilfe.

In der letzten Anwendung haben wir zwei Formeln für die Beschleunigung (4.3. und 4.23.) verwendet. Diese setzen wir jetzt gleich:

$$\frac{v^2}{r} = G\frac{M}{r^2} \tag{4.25}$$

In diese Formel geht bereits ein, dass die Masse des umdrehenden Objekts vernachlässigbar klein im Vergleich zu dem Objekt ist, um das es sich dreht. Wenn das nicht der Fall wäre, würden sich die Himmelskörper gegenseitig umkreisen (so wie es zum Beispiel bei Doppelsternen der Fall ist). Bei Exoplaneten kann man die Formel jedoch immer anwenden. Um den Radius auf eine Seite zu bringen, multiplizieren wir die Formel mit r^2

$$rv^2 = GM \tag{4.26}$$

Die Masse des Sterns ist in der Regel leicht zu bestimmen (er ist ja auch viel größer als der Exoplanet). Wenn man zusätzlich den Radius weiß kann man auch die Geschwindigkeit des Planeten ausrechnen und umgekehrt. Noch mehr Erkenntnisse gewinnt man, wenn man weiß:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2r\pi}{P} \tag{4.27}$$

Dann kann man nämlich nur aus dem Radius sowohl Geschwindigkeit als auch Umlaufdauer oder nur aus der Umlaufdauer Radius und Geschwindigkeit oder nur aus der Geschwindigkeit Radius und Umlaufdauer ausrechnen.

Anwendung für die Berechnung der Gezeitenkräfte
In diesem Kapitel wird der Abstand zwischen Erde und Mond als a bezeichnet, um ihn vom Erdradius r zu unterscheiden.

Die Gezeiten werden bekanntermaßen von der Gravitationskraft des Mondes und der Zentrifugalkraft der Erde ausgelöst (alle anderen Faktoren wie zum Beispiel die Gravitationskraft der Sonne werden wir vernachlässigen). Die Gravitationskraft des Mondes ist auf der mondzugewandten Seite laut Newton'schem Gesetz

$$\frac{GMm}{(a-r)^2} \tag{4.28}$$

Auf der mondabgewandten Seite hingegen nur

$$\frac{GMm}{(a+r)^2} \tag{4.29}$$

Die Zentrifugalkraft der Erde wird vor allem durch die Drehbewegung der Erde um den Schwerpunkt zwischen Erde und Mond ausgelöst und ist daher

$$-\frac{GMm}{a^2} \tag{4.30}$$

Das Minus kommt daher, dass die Zentrifugalkraft immer nach außen, also genau entgegen der Schwerkraft des Mondes wirkt. (Der Schwerpunkt von Erde und Mond ist schließlich auf der Verbindungslinie zwischen Erdmittelpunkt und Mond).

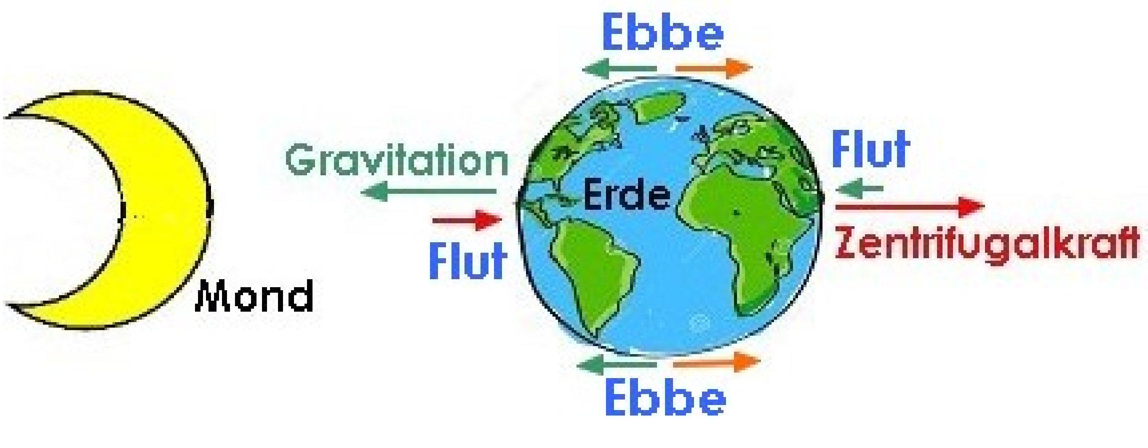
Betrachten wir nun das Meer auf der mondzugewanden Seite. Hier ist die Gravitationskraft des Mondes größer als die Zentrifugalkraft, insgesamt wird also das Wasser zum Mond hingezogen, es herrscht Flut.

$$\frac{GMm}{(a-r)^2} - \frac{GMm}{a^2} > 0 \tag{4.31}$$

Auf der mondabgewanden Seite ist die Zentrifugalkraft größer als die Gravitationskraft, das Wasser wird also insgesamt vom Mond weggezogen. Auch hier herrscht Flut

$$\frac{GMm}{(a+r)^2} - \frac{GMm}{a^2} < 0 \tag{4.32}$$

Auf den beiden Seiten, die im rechten Winkel zum Mond stehen, wird das Wasser durch Gravitations- und Zentrifugalkraft seitlich weggeschoben und es ist weniger Wasser in den Meeren. Hier herrscht Ebbe.



Durch Einsetzen von Gravitationskonstante, Erdmasse, Mondmasse, Erdradius und Abstand zwischen Erde und Mond in 4.31. oder 4.32. erhält man die Stärke der

Gezeitenkraft. Diese ist nur ein 10-Millionstel der Gravitationskraft der Erde. Das bedeutet, dass das Meer insgesamt bei Ebbe mit 100% der Erdgravitation, bei Flut jedoch nur mit 99,99999% der Erdgravitation angezogen wird. Dadurch wird das Wasser im Meer minimal weniger stark zusammengedrückt. Durch die Tiefe des Meeres entsteht dennoch ein messbarer Unterschied.

Das gilt auch für alle anderen Stoffe, allerdings merken wir nur den Unterschied zwischen dem Wasser, dass stärker zusammengedrückt wird und den Festkörpern, die weniger stark zusammengedrückt werden, so dass das Wasser im Vergleich zur Landmasse höher erscheint. In Wirklichkeit sind auch die Landmassen höher und der scheinbare Anstieg entspricht nur dem Anstieg des Wassers weniger dem Anstieg der Landmassen.

5 Die Kepler'schen Gesetze

Die Kepler'schen Gesetze beschreiben die Bewegung der Planeten. Sie wurden zunächst von Johannes Kepler durch Beobachtung herausgefunden. Mit Hilfe des Newton'schen Gravitationsgesetzes kann man sie jedoch auch herleiten

Herleitung der Kepler'schen Gesetze

Erstes Kepler'sches Gesetz: Die Planeten kreisen auf Ellipsenbahnen. In einem Brennpunkt steht die Sonne

Aus Formel 4.16. haben wir gefolgert, dass sich Himmelskörper nur in Ellipsen- oder Hyperbelbahnen um eine Gravitationsquelle bewegen können. Himmelskörper die sich in Hyperbelbahnen an der Sonne vorbeibewegen, passieren diese nur ein mal und sind daher laut Definition keine Planeten sondern Kometen.

In unserem Sonnensystem haben alle Planetenbahnen eine sehr kleine Exzentrität und sind daher fast kreisförmig. Das liegt vermutlich an der Drehbewegung der protoplanetaren Scheibe, die innerhalb der Neptunbahn fast kreisförmig war. Erst weiter außen bei den Zwergplaneten im Kuipergürtel und den periodischen Kometen in der Oort'schen Wolke werden die Umlaufbahnen elliptischer.

Das werden wir bei den folgenden Herleitungen nützen und die Planetenbahnen als Kreisbahnen mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten idealisieren.

Zweites Kepler'sches Gesetz: Die Planeten überstreichen in gleichen Zeiten gleiche Flächen

Die Flächenformel für den Kreis lautet $A = r^2\pi$. Die Flächenformel eines Kreissektors erhält man folglich, wenn man die Formel durch 2π dividiert und sie mit dem Winkel ϕ in Bogenmaß multipliziert.

$$A = \frac{r^2\phi}{2} \tag{5.1}$$

Die Umfangformel für den Kreis lautet $U = 2r\pi$. Die Bogenlänge eines Kreissektors erhält man folglich, wenn man die Formel durch 2π dividiert und sie mit dem Winkel ϕ in Bogenmaß multipliziert.

$$b = r\phi \tag{5.2}$$

Um sich die Zeit auszurechnen, die der Planet benötigt, um diese Strecke zurück zu legen, muss man die Formel durch die Geschwindigkeit dividieren.

$$t = \frac{r\phi}{v} \tag{5.3}$$

Man kann 5.1. und 5.3. beide nach ϕ umformen und sie gleichsetzen. Dann erhält man die Formel

$$2A = tvr \tag{5.4}$$

Da Geschwindigkeit und Radius nach Voraussetzung konstant sind, ergibt sich für die gleiche Fläche immer die gleiche Zeit und umgekehrt.

Dieses Gesetz ist nur historisch relevant: Während man sich durch das zweite Keplersche Gesetz die Umlaufzeit nur ausrechnen kann, wenn man die überstrichene Fläche sowie eine gleich große überstrichene Fläche und die dazugehörige Umlaufzeit kennt, kann man mit 5.4. die Umlaufzeit nur aus der überstrichenen Fläche ausrechnen.

Für eine Ellipsenbahn ist die Herleitung ähnlich, bis darauf, dass Radius und Geschwindigkeit nicht mehr konstant sind. Es gilt jedoch weiterhin die Drehimpulserhaltung ($\vec{L} = m\vec{\omega} = const.$). Da sich die Masse des Planeten nicht verändert gilt auch $\vec{\omega} = \vec{r}x\vec{v} = const.$ und $|\vec{\omega}| = |\vec{r}||\vec{v}| = const.$ Durch einsetzen in 5.4. erhält man 2A=Ct mit den Konstanten 2 und C, so dass man auch für Ellipsen das 2. Kepler'sche Gesetz erhält.

Drittes Kepler'sches Gesetz: Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der Bahnradien

Für das dritte Kepler'sche Gesetz existieren zwei Versionen: Eine spezielle Version für Einfachsternsysteme wie unser Sonnensystem und eine allgemeine Version für Mehrfachsternsysteme wie die meisten Sternsysteme in unserem Universum.

Für die Herleitung der speziellen Form des 3. Kepler'schen Gesetzes für Einfachsternsysteme kann man die zwei Formeln (4.26. und 4.27.) verwenden, die wir schon für die Erforschung der Exoplaneten hergeleitet haben.

$$rv^2 = GM \tag{5.5}$$

$$v = \frac{2r\pi}{P} \tag{5.6}$$

Durch Einsetzen von 5.6. in 5.5. erhält man

$$\frac{4r^3\pi^2}{P^2} = GM \tag{5.7}$$

Division durch $4\pi^2$ ergibt

$$\frac{r^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \tag{5.8}$$

Betrachten wir nun zwei Himmelskörper die das selbe Objekt umkreisen. Dann gilt:

$$\frac{r_1^3}{P_1^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \tag{5.9}$$

$$\frac{r_2^3}{P_2^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \tag{5.10}$$

Da beide Gleichungen dasselbe Ergebnis haben, können wir sie gleichsetzen und erhalten direkt das dritte Kepler'sche Gesetz

$$\frac{r_1^3}{P_1^2} = \frac{r_2^3}{P_2^2} \tag{5.11}$$

Mit diesem Gesetz kann man den Radius nur ausrechen, wenn man schon den Radius und die Periodendauer eines anderen Planeten, der um den selben Stern kreist (existiert nicht immer) und die Periodendauer des Planeten selbst kennt. Mit 5.8. können wir mit dem gleichen Rechenaufwand den Radius nur mit Hilfe der Periodendauer ausrechnen. In der Praxis wird also nur noch dieses Gesetz verwendet, das dritte Kepler'sche Gesetz ist lediglich historisch relevant.

Für die allgemeine Form des dritten Kepler'schen Gesetzes, verwenden wir unser Wissen, dass die gesamte Gravitationskraft eines Systems vom Schwerpunkt ausgeht. Die Kraft wird vor allem von den Sternen ausgelöst, alle anderen Massen sind vernachlässigbar gering (Bei unserem Sonnensystem weniger als 1% der Gesamtmasse). Statt der Sternmasse kann man daher einfach die Summe der Sternmassen einsetzen. Statt des Radius muss man den Abstand des Planeten vom Schwerpunkt (a) einsetzen. Es gilt also:

$$\frac{a_1^3}{P_1^2} = \frac{a_2^3}{P_2^2} \tag{5.12}$$

Da das 3. Kepler'sche Gesetz in dieser historischen Form unpraktisch ist, setzen wir das auch noch in 5.5. und 5.6. ein:

$$av^2 = G\sum_{i=1}^{n} M_i \tag{5.13}$$

$$v = \frac{2a\pi}{P} \tag{5.14}$$

Die allgemeine Form des dritten Kepler'schen Gesetzes gilt nur, wenn der Abstand des Planeten vom Schwerpunkt groß im Vergleich zum Abstand der Sterne untereinander ist, weil wir bei der Herleitung von einer kreisförmigen Umlaufbahn um alle Sterne ausgegangen sind.

6 Konservative Kraftfelder

Man bezeichnet ein Feld als konservatives Kraftfeld, wenn die Arbeit nur von Anfangs- und Endpunkt, nicht aber von der dazwischen gewählten Route abhängig ist.

Ein anschauliches Beispiel für ein konservatives Kraftfeld ist, wenn man mit dem Fahrrad auf einem Berg fährt. Dann ist es egal, ob man über den flacheren Serpentinenweg oder über den direkten steilen Weg hinauffährt, man muss immer gleich viel Arbeit aufbringen.

Insbesondere ist die Arbeit auf einem geschlossenen Weg immer Null, weil man dann gleich viel Kraft benötigt, wie wenn man sich überhaupt nicht bewegt.

In unserem anschaulichen Beispiel würde das bedeuten, wenn man ohne zu bremsen den Berg hinunter fährt, kommt man mit diesem Schwung bis hinauf zur Ausgangsposition.

Da die Kraft, die man benötigt, um von einem Punkt zum anderen zu kommen, laut Annahme immer gleich groß sein muss, bedeutet das, dass man eine eindeutige Funktion finden kann, in die man Anfangs- und Endpunkt einsetzen kann, sodass man immer die benötigte Kraft erhält. Diese Funktion nennt man Potential (V).

Die Richtung, in die die Kraft wirkt, muss dann immer der Gradient davon sein, weil es ja die meiste Arbeit benötigt, direkt gegen die Kraft anzukämpfen. Es gilt also:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\delta V}{\delta x} \\ \frac{\delta V}{\delta y} \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

Anwendung des Potentials auf das Gravitationsfeld
Wir wollen uns das Potential mit Hilfe der Kraft für das Gravitationsfeld ausrechnen, um damit mehr über die Eigenschaften des Gravitationsfeld herauszufinden. Die Kraft, die in einem Gravitationsfeld wirkt, ist laut dem Newton'schen Gravitationsgesetz

$$\vec{F} = G\frac{Mm}{r^2} \tag{6.2}$$

Da diese Kraft nur vom Radius abhängt, und bei gleichem Radius unabhängig vom Winkel immer gleich groß ist, lässt sich die Kraft am einfachsten in Polarkoordinaten darstellen. In diesem Fall steht in der r-Koordinate das gesamte Newton'sche

Gravitationsgesetz und in der ϕ-Koordinate Null (Die Kraft wirkt ausschließlich in r-Richtung).

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} G\frac{Mm}{r^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta V}{\delta r} \\ \frac{\delta V}{\delta \phi} \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

Bevor wir uns das Potential ausrechnen, wollen wir prüfen, ob überhaupt ein Potential existiert. Dazu benutzen wir die Beziehung

$$\frac{\delta^2 V}{\delta r \delta \phi} = \frac{\delta^2 V}{\delta \phi \delta r} \tag{6.4}$$

Wenn wir also die r-Koordinate nach ϕ ableiten, müssen wir dasselbe erhalten, wie wenn wir die ϕ-Koordinate nach r ableiten, sonst kann gar keine Potentialfunktion existieren. In unserem Fall erhalten wir immer Null, also ist das Kraftfeld konservativ.

Dann benutzen wir die r-Komponente der Formel 6.3.

$$\frac{\delta V}{\delta r} = G\frac{Mm}{r^2} \tag{6.5}$$

um uns durch einfache Integration das Potential auszurechnen:

$$V = -G\frac{Mm}{r} + f(\phi) \tag{6.6}$$

Statt der Integrationskonstante verwenden wir $f(\phi)$, weil bei der partiellen Ableitung ϕ als Konstante angesehen wird. Um sich die Funktion $f(\phi)$ auszurechnen, verwenden wir die ϕ-Komponente von 6.3.:

$$\frac{\delta V}{\delta \phi} = 0 \tag{6.7}$$

Wir leiten also 6.6. nach ϕ ab um die Formel in 6.7. einzusetzen. Nun erhalten wir:

$$f'(\phi) = 0 \tag{6.8}$$

Integration ergibt

$$f(\phi) = C \tag{6.9}$$

Das können wir in 7.6. einsetzen und erhalten:

$$-\frac{GMm}{r} + C \tag{6.10}$$

Die Konstante kann man auch weglassen, weil sie sowieso immer wegfällt, wenn man die Formel für zwei unterschiedliche Punkte subtrahiert. Das Potential des

Gravitationsfelds bezeichnet man als Gravitationspotential und man kürzt es mit dem Buchstaben Φ ab.

$$\Phi = -\frac{GMm}{r} \tag{6.11}$$

Möchte man die Arbeit ausrechnen, die man benötigt, um von Punkt P_1 zum Punkt P_2 zu kommen, setzt man die Radien der beiden Punkte in das Potential ein und zieht sie voneinander ab.

$$W = -\frac{GMm}{r_2} + \frac{GMm}{r_1} \tag{6.12}$$

Wenn r_1 größer als r_2 ist, ergibt das ein positives Ergebnis, das heißt, man benötigt Arbeit, um sich von der Gravitationsquelle wegzubewegen. Beispielsweise braucht ein Flugzeug Treibstoff, um sich von der Erde (also der Gravitationsquelle) wegzubewegen.

Ist r_1 hingegen kleiner als r_2, also nähert man sich der Gravitationsquelle, erhält man sogar Arbeit. Wenn wir also das Flugzeug aus unserem Beispiel abstürzen lassen, wird Arbeit erzeugt, die nach dem Aufprall in einen Einschlagkrater und in die Zerstörung des Flugzeugs investiert wird.

Innerhalb des Zentralgestirns gilt die Formel nicht mehr, weil auch die weiter außen liegenden Schichten eine Anziehungskraft ausüben. Deshalb ist es auch kein Problem, dass die Arbeit bei der Stelle $r = 0$ unendlich wäre.

Wenn man das Potential als Funktion des Radius aufträgt, bekommt man ein topfförmiges Gebilde, den sogenannten „Potentialtopf“ (siehe Graphik unten). In dieser Graphik erkennt man, dass es umso schwerer wird, der Gravitation zu widerstehen, je näher man dem Zentralgestirn ist.