

# Physikalische Grundlagen

## Relativitätstheorie

### Grundlagen aus dem ersten Semester:

[Physikskript - 1. Semester \(Seite 101 - 117\)](#)

[Zusammenfassung des Physikskripts - 1. Semester \(Seite 18 - 21\)](#)

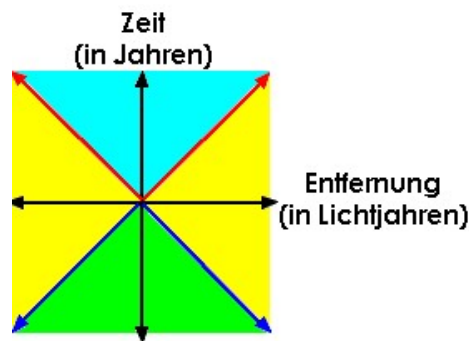
[Astronomische Maßeinheiten \(Seite 5\)](#)

Mit der Newton'schen Mechanik lässt sich die Gravitation zwar bei kleinen Massen und niedrigen Geschwindigkeiten berechnen, es kommen in der Astronomie aber auch immer wieder große Massen, wie zum Beispiel schwarze Löcher und hohen Geschwindigkeiten wie zum Beispiel Teilchenjets vor. Für derartige Anwendungen benötigt man die Relativitätstheorie.

Die Konzepte der Lorentzkontraktion, der Zeitdilatation und der Einsteingeschwindigkeit wurden bereits in der Physik-STEOP erklärt und hergeleitet. Dieses Skriptum wird diese Konzepte voraussetzen.

## 1 Minkowskiraum

Der Minkowskiraum ist eine Darstellungsweise, um die Relativitätstheorie bei hohen Geschwindigkeiten möglichst einfach zu beschreiben. Dabei wird die Zeit in Jahren und der Raum in Lichtjahren dargestellt. (Diese Einheiten werden in diesem Skriptum durchgehend verwendet).



In dieser Graphik ist ein so genanntes Minkowskidiagramm dargestellt.

Da das Licht in einem Jahr genau ein Lichtjahr zurücklegt, sind die Orte, die derzeit sichtbar sind genau in einem  $45^\circ$ -Winkel nach unten (blaue Pfeile in der Grafik). Innerhalb dieses Winkels (in der Graphik grün dargestellt) sind alle Orte, aus denen uns derzeit Objekte erreichen können. Entlang der roten Pfeile sind alle Gebiete, von

denen aus man uns sehen kann. Innerhalb dieses Winkels (blauer Bereich) sind alle Gebiete, die von uns aus erreichbar sind. Die gelben Gebiete stehen in überhaupt keinem Zusammenhang zum derzeitigen Ort.

Für die roten und blauen Pfeile in der Graphik gilt  $|x| = t$ . Mit dem Satz von Pythagoras folgt daraus

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \tag{1.1}$$

Wenn man alle Unbekannten auf dieselbe Seite bringt, erhält man

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0 \tag{1.2}$$

Für Licht verhält sich die Zeitkoordinate deshalb analog zu einer Ortskoordinate, abgesehen davon dass sie negativ gemessen wird. Die Standardbasis dafür lautet daher

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die -1 steht dabei für die Zeitkoordinate und die drei 1er für die Ortskoordinaten. Diese Matrix wird als Minkowskimetrik bezeichnet.

Alternativ kann man auch die Unbekannten aus 1.1. auf die andere Seite bringen

$$0 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{1.3}$$

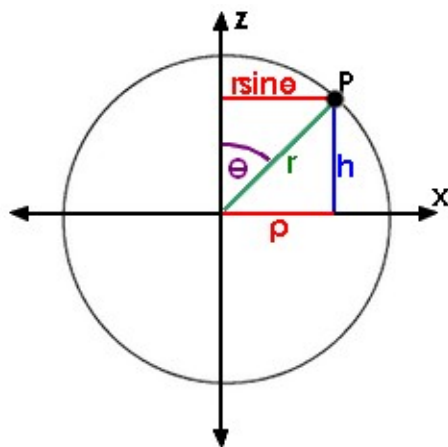
und erhält damit die genau entgegengesetzten Vorzeichen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es werden beide Definitionen der Minkowskimetrik verwendet

Für die Verallgemeinerung auf die Schwarzschildmetrik, bei der die Raumzeit gekrümmt dargestellt wird, ist es sinnvoll, die Minkowskimetrik in Kugelkoordinaten darzustellen. Da auch die Kugelkoordinaten im rechten Winkel aufeinander stehen, kann man auch dafür den Satz von Pythagoras verwenden.

Dabei werden Zeit und Radius weiterhin in Jahren bzw. Lichtjahren gemessen. Diese Komponenten gehen dabei also gleichermaßen in die Minkowskimetrik ein. Der stehende Deklinationswinkel ( $\theta$ ) wird in Bogenmaß gemessen, er muss also mit dem Radius in Lichtjahren multipliziert werden. Der liegende Polarwinkel ( $\phi$ ) muss aus demselben Grund ebenfalls mit dem Radius multipliziert werden. Hier entspricht der Radius allerdings nicht dem Radius der Kugel sondern nur dem Schatten des Radius ( $\rho$ ). Dieser hat die Länge  $\rho \sin\theta$



In dieser Graphik ist die Kugel orthogonal auf die Polarebene dargestellt. Dadurch wird intuitiv klar, dass der Radius des Polarkreises  $r \sin \theta$  beträgt.

Wenn man die soeben berechneten Koordinaten in 1.2. einsetzt, erhält man

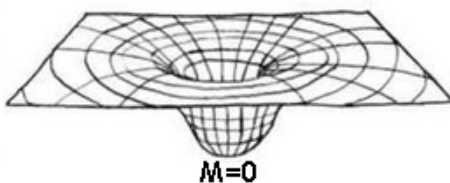
$$r^2 + (r\theta)^2 + (r \sin \theta \phi)^2 - t^2 = 0 \tag{1.4}$$

oder als Standardbasis in Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

## 2 Schwarzschildraum (Äußere Lösung)

Die Minkowskimetrik lässt sich nur anwenden, wenn keine großen Massen in der Nähe sind. Von großen Massen wird das Licht angezogen und deshalb zur Masse hin gekrümmt. (Die roten und blauen Pfeile im Minkowskidiagramm wären aufgrund des Umwegs zur Zeitachse gekrümmt). Um das auszugleichen verwendet man die äußere Lösung der Schwarzschildmetrik, die bis zur Oberfläche der Masse gilt. Dabei wird die Raumzeit gekrümmt dargestellt.



In dieser Graphik ist die Raumkrümmung dargestellt, indem die vierdimensionale Raumzeit ins zweidimensionale projiziert wurde. Um das Rechnen zu vereinfachen,

setzt man den Ursprung genau in den Mittelpunkt der Masse ( $M=0$ ). Dann bleibt die Anziehungskraft entlang der  $\phi$ -Koordinate und entlang der  $\theta$ -Koordinate konstant, sodass das Licht, das sich entlang dieser Koordinatenlinien bewegt, nicht gekrümmt wird. Diese Koordinaten können also mit  $r$  bzw. mit  $r \sin\theta$  skaliert bleiben.

Die Zeitdilatation und die Lorentzkontraktion treten bei hohen Massen ähnlich wie bei hohen Geschwindigkeiten auf.

	hohe Geschwindigkeiten	hohe Massen
<b>Zeitdilatation</b>	$t = \frac{t_{ruhe}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	$t = \frac{t_{grav}}{\sqrt{1 - \frac{r_S}{r}}}$
<b>Lorentzkontraktion</b>	$r = r_{ruhe} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$	$r = r_{grav} \sqrt{1 - \frac{r_S}{r}}$

In dieser Tabelle werden die gravitative Zeitdilatation und die gravitative Lorentzkontraktion mit jenen für die Geschwindigkeiten verglichen.  $r_S$  steht dabei für den Schwarzschildradius, also für den Radius, bei dem die Entweichgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit wäre.

Für die Minkowskimetrik benötigt man die gravitative Zeitdilatation (für den zeitlichen Abstand) und die gravitative Lorentzkontraktion (für den räumlichen Abstand, also dem Radius). Um sie auf die gravitative Zeit und die gravitative Entfernung zu skalieren, muss man diese Formeln nach der gravitativen Zeit bzw. der gravitativen Entfernung umformen.

$$t_{grav} = t \sqrt{1 - \frac{r_S}{r}} \tag{2.1}$$

$$r_{grav} = \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{r_S}{r}}} \tag{2.2}$$

Durch Einsetzen der Skalierungen in 1.2. erhält man

$$\frac{r^2}{(1 - \frac{r_S}{r})} + r^2 \theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \phi^2 - (1 - \frac{r_S}{r}) t^2 = 0 \tag{2.3}$$

Die Standardbasis der äusseren Schwarzschildmetrik lautet daher

$$\begin{pmatrix} -(1 - \frac{r_S}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{r_S}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Weit von der Masse entfernt bleibt die Gravitation vernachlässigbar klein und auch der Schwarzschildradius ist im Vergleich zum Radius vernachlässigbar klein. Hier stellt die Minkowskimetrik eine gute Näherung dar. Je näher der Radius dem Schwarzschildradius kommt, desto stärker wird das Licht abgelenkt und desto stärker wird die Raumzeit gekrümmt. Der Radius wird immer länger, weil das Licht durch den Umweg immer langsamer wird und die Lichtjahre dadurch immer kürzer werden. Gleichzeitig wird die Zeit immer kürzer, weil die Lichtgeschwindigkeit langsamer wird und dadurch die Zeitdilatation bei geringeren Geschwindigkeiten eintritt.

### 3 Schwarzschildradius

Bei den meisten Objekten ist der Radius viel größer als der Schwarzschildradius. Die äußere Lösung endet also schon lang, bevor der Schwarzschildradius erreicht ist. Es gibt jedoch auch Objekte die so dicht sind, dass sie innerhalb des Schwarzschildradius Platz haben. Man bezeichnet sie als schwarze Löcher.

Wie aus der Schwarzschildmetrik ersichtlich ist, wird die Zeitkomponente beim Schwarzschildradius Null. Wenn man einen Lichtstrahl beobachtet, der sich dem Schwarzschildradius nähert, beobachtet man daher, dass der Lichtstrahl immer langsamer wird und schließlich beim Schwarzschildradius stehen bleibt, weil sich dort die Zeit nicht mehr verändert. Der Radius wird unendlich, weil ein Lichtjahr dadurch 0 Meter lang ist. Die Raumzeit ist hier so stark gekrümmt, dass sie normal auf den Radius und normal auf die Zeitkoordinate steht.

Wenn ein roter Riese zu einem schwarzen Loch kollabiert, ist die Beobachtung ähnlich: Die Kollision erscheint immer langsamer, bis sie am Schwarzschildradius stehen bleibt. Jetzt stellt sich natürlich die Frage, warum uns die schwarzen Löcher schwarz erscheinen und man nicht das Licht des roten Riesen und aller Sterne die das schwarze Loch jemals angesaugt hat am Schwarzschildradius leuchten sieht.

Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir die Photonen, die uns von einem ins schwarze Loch stürzenden Objekt erreichen. Da die Entweichgeschwindigkeit immer größer wird, erreichen uns immer weniger Photonen. Die Helligkeit eines eingesaugten Sterns nimmt exponentiell ab.

$$Ph_1 = \frac{Ph_2}{e^{\frac{t}{2r_s}}} \quad (3.1)$$

In dieser Formel steht  $Ph_1$  für die Zahl der uns erreichenden Photonen,  $Ph_2$  für die Zahl der Photonen, die uns erreichen würden, wenn das Objekt nicht in ein schwarzes Loch stürzt und  $t$  für die Zeit, die seit dem Eintritt des Objekts in den Schwarzschildradius vergangen ist. Wenn man in diese Formel Werte einsetzt, merkt man, dass nach nur wenigen Millisekunden jedes noch so leuchtkräftige Objekt verblasst ist.

Wenn man sich den Vorgang also in Zeitlupe anschauen würde, würde das eingesaugte Objekt scheinbar langsamer werden und verblassen. Mit freiem Auge sieht man das Objekt einfach nur verschwinden.

## Herleitung

Um herzuleiten, wie groß der Schwarzschildradius ist, betrachten wir einen Lichtstrahl, der sich entlang der Radiuskoordinatenlinie bewegt. Für ihn kann man in der Formel 2.3. für beide Winkel 0 einsetzen.

$$\frac{r^2}{1 - \frac{r_S}{r}} - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)t^2 = 0 \quad (3.2)$$

Multiplikation mit  $1 - \frac{r_S}{r}$  ergibt:

$$r^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^2 t^2 = 0 \quad (3.3)$$

Addition von  $\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^2 t^2$  ergibt:

$$r^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^2 t^2 \quad (3.4)$$

Division durch  $t^2$  ergibt:

$$v^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^2 \quad (3.5)$$

da der Geschwindigkeitsvektor genau entlang des Radius zeigt. Durch das Ziehen der Wurzel erhält man:

$$v = \pm \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \quad (3.6)$$

Da sich der Lichtstrahl auf das schwarze Loch zu bewegt, wählt man die negative Lösung, bei der der Abstand immer kleiner wird.

$$v = -1 + \frac{r_S}{r} \quad (3.7)$$

Diese Gleichung kann man als gewöhnliche Differentialgleichung auffassen, bei der die Geschwindigkeit die Ableitung des Radius nach der Zeit ist.

$$\frac{dr}{dt} = -1 + \frac{r_S}{r} \quad (3.8)$$

Durch Division durch die rechte Seite und Multiplikation mit dt kann man die Unbekannten zusammenbringen.

$$-\frac{dr}{1 - \frac{r_S}{r}} = dt \quad (3.9)$$

Um den Doppelbruch zu eliminieren multipliziert man oberhalb und unterhalb des Bruchstrichs mit r

$$-\frac{rdr}{r-r_s} = dt \quad (3.10)$$

Um das Integral auszurechnen kann man  $u = r - r_s$  substituieren. Für die Ableitung davon gilt

$$\frac{du}{dr} = 1 \quad (3.11)$$

Durch Multiplikation mit  $dr$  erhält man  $du=dr$ . Durch Einsetzen der Substitution in 3.9. erhält man

$$-\frac{(u+r_s)du}{u} = dt \quad (3.12)$$

Durch trennen des Bruchs erhält man

$$-\frac{u}{u} - \frac{r_s}{u} du = dt \quad (3.13)$$

Diese Formel lässt sich vereinfachen

$$\left(-1 - r_s \frac{1}{u}\right) du = dt \quad (3.14)$$

Bei dieser Formel kann man leicht auf beiden Seiten integrieren

$$-u - r_s \ln u = t + C \quad (3.15)$$

Den Ursprung der Zeitkoordinate kann man so legen, dass die Integrationskonstante 0 ist

$$-u - r_s \ln u = t \quad (3.16)$$

Rücksubstitution ergibt

$$-r + r_s - r_s \ln(r - r_s) = t \quad (3.17)$$

Wir betrachten das Licht kurz vor Erreichen des Schwarzschildradius. Hier wird der Logarithmus immer größer, bis die Differenz zwischen Radius und Schwarzschildradius vernachlässigbar klein im Vergleich zum Logarithmus wird. Hier gilt näherungsweise

$$-r_s \ln(r - r_s) = t \quad (3.18)$$

Division durch den Schwarzschildradius und Multiplikation mit -1 ergibt

$$\ln(r - r_S) = -\frac{t}{r_S} \quad (3.19)$$

Auflösen des Logarithmus ergibt

$$r - r_S = e^{-\frac{t}{r_S}} = \frac{1}{e^{\frac{t}{r_S}}} \quad (3.20)$$

Die rechte Seite entspricht laut 3.1.  $\frac{Ph_1}{Ph_2}$

$$r - r_S = \frac{Ph_1}{Ph_2} \quad (3.21)$$

Diese Formel kann man nach dem Schwarzschildradius umformen und erhält damit

$$r_S = -\frac{Ph_1}{Ph_2} + r \quad (3.22)$$

Achtung! Eine falsche Herleitung des Schwarzschildradius, bei der die Formel für potentielle Energie und kinetische Energie gleichgesetzt wird, ist weit verbreitet. In dieser Herleitung sind jedoch zwei Denkfehler enthalten: Erstens wird für die potentielle Energie die Newtonsche statt der Relativistischen Formel verwendet und zweitens können sich nur masselose Teilchen mit Einsteingeschwindigkeit bewegen (wenn man die relativistische Formel für die potentielle Energie verwenden würde, würde das zu einem Widerspruch führen).

## 4 Rotverschiebung

Wenn sich ein Objekt mit hoher Geschwindigkeit von uns weg bewegt, erreichen uns nur noch die langwelligen roten Lichtstrahlen, die weniger Umwege machen. Das Objekt erscheint rotverschoben.

Analog ist das bei hohen Massen: Wenn die Entweichgeschwindigkeit nahe der Lichtgeschwindigkeit ist, entweichen nur die langwelligen roten Lichtstrahlen. Auch in diesem Fall erscheint uns das Objekt rotverschoben.

Mit der Rotverschiebung kann man also nicht nur den Abstand von weit entfernten Objekten, sondern auch das Gewicht von massereichen Objekten berechnen. Dafür benötigt man die Formel für die gravitative Rotverschiebung:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_S}{r}}} \quad (4.1)$$

In dieser Formel steht  $\lambda$  für die gemessene Wellenlänge und  $\lambda_0$  für die verschobene Wellenlänge. Aus dem Schwarzschildradius kann man die Masse mit der Formel

$$r_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (4.2)$$

berechnen. Bei massereichen und weit entfernten Objekten, muss man zuerst die durch die Entfernung entstandene Rotverschiebung herausrechnen.