Elektromagnetische Strahlung

Strahlungsänderungen

Grundlagen aus dem ersten Semester
05-Astronomische Instrumente (Seite 2 - 3)
07-Eigenschaften der Sterne (Seite 2 - 5)
Einführung in die Physik (Seite 70 - 103)

Strahlung kann sich beim Durchlauf durch Materialien auf zwei Arten verändern: Sie kann emmitiert oder extinktiert werden.

Emmission bedeutet, dass das Material Licht abgibt, die Strahlung wird also stärker. Ein Beispiel für ein stark emmitierendes Objekt ist ein Stern.

Extinktion bedeutet, dass das Material Licht aufnimmt (Absorption) oder umleitet (Streuung). In beiden Fällen wird die Strahlung schwächer. Ein Beispiel für ein stark extinktierendes Objekt ist eine Dunkelwolke.

1 Emmission

In den meisten Fällen entsteht Strahlung durch beschleunigte Ladungen. Es gibt unterschiedliche Gründe, warum die Ladung beschleunigt wird. Die häufigsten Ursachen sind die Ladung anderer Teilchen (Bremsstrahlung) und Magnetfelder (Gyroemmission).

Larmorformeln

Mit Hilfe der Larmorformeln kann man sich die Strahlungsleistung aus der Ladung und der Beschleunigung ausrechnen.

Es gibt zwei relativistische Larmorformeln, die man anwenden muss, wenn sich die Ladungen mit annähernd Lichtgeschwindigkeit bewegen, und zwei nichtrelativistische Larmorformeln, die eine gute Näherung für langsamere Ladungen darstellen.

Diese unterteilt man jeweils in eine winkelunabhängige Larmorformel, mit der man die gesamte Strahlung berechnen kann, und eine winkelabhängige Larmorformel, die sich auf die Strahlung aus einer Richtung beschränkt.

Aus der relativistischen winkelabhängigen Larmorformel kann man sich alle weiteren Larmorformeln herleiten: Die nichtrelativistischen in dem man die Geschwindigkeit vernachlässigt und die winkelunabhängigen, indem man über alle Raumrichtungen integriert.

Nichtrelativistische winkelunabhängige Larmorformel

$$Q[\frac{erg}{s}] = \frac{2q^2a^2}{3c^3} \tag{1.1}$$

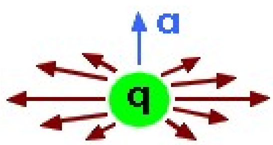
In dieser Formel ist Q die Strahlungsleistung, q die Ladung, a die Beschleunigung und c die Einsteingeschwindigkeit. Man erkennt, dass die Strahlungsleistung umso größer wird, je stärker die Ladung und je stärker die Beschleunigung ist. Da die Beschleunigung quadriert wird, ist die Strahlung immer positiv, auch wenn die Ladung langsamer wird.

Nichtrelativistische winkelabhängige Larmorformel

$$Q(\phi) = \frac{q^2a^2sin^2\phi}{4\pi c^3} \tag{1.2}$$

In dieser Gleichung ist ϕ der Winkel zwischen der Beschleunigungsrichtung und der betrachteten Abstrahlungsrichtung. Man erkennt, dass die Strahlung in Richtung der Beschleunigung 0 wird und im rechten Winkel zur Beschleunigung die maximale Strahlungsleistung erreicht.

In der folgenden Graphik ist dieser Zusammenhang graphisch dargestellt. Die emmitierte Strahlung ist dabei mit braunen Pfeilen dargestellt, wobei die Länge der Pfeile die Intensität angibt (Je länger der Pfeil, desto intensiver die Strahlung.



Man muss sich diese Grafik natürlich dreidimensional vorstellen, wobei die Strahlung in alle Richtungen gleichermaßen zunimmt.

Relativistische winkelunabhängige Larmorformel

Bei den relativistischen Larmorformeln muss man zusätzlich zu den klassischen Effekten auch noch relativistische Effekte (Lorentzkontraktion vom Radius, Masseninvarianz der Elektronenmasse) betrachten. Dafür werden die Lorentzfaktoren β und γ benötigt

$$\beta = \frac{v}{c} \tag{1.3}$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{1.4}$$

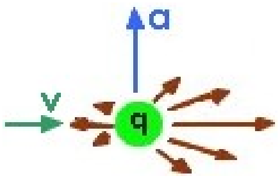
Die winkelunabhängige Larmorformel lautet:

$$Q[\frac{erg}{s}] = \frac{2q^2\gamma^6}{3c}[(\dot{\beta}) - (\beta x\dot{\beta})^2] \tag{1.5}$$

Relativistische winkelabhängige Larmorformel

$$Q(\phi) = \frac{q^2 a^2}{4\pi c^3}\frac{sin^2\phi}{(1-\beta cos\phi)^5} \tag{1.6}$$

Im Bezugssystem der Ladung ist die Strahlungsverteilung weiterhin so wie in der nichtrelativistischen Larmorformel (das muss auch so sein, weil die Ladung in seinem eigenen Bezugssystem ruht). Im Bezugssystem des Beobachters spielt hingegen die Lorentzkontraktion eine große Rolle, sodass die Strahlungsleistung in Bewegungsrichtung gedehnt und in die andere Richtung gestaucht ist.



Bremsstrahlung

Wenn geladene Teilchen (meistens freie Elektronen) von anderen geladenen Teilchen (meistens Ionen) angezogen werden, ändern diese ihre Richtung und damit auch ihre Geschwindigkeit. Dadurch geben diese Ladungen Strahlung ab, man spricht in dem Fall von Bremsstrahlung.

Der Name Bremsstrahlung ist rein historisch bedingt und deshalb irreführend: Die Ladungen können bei diesem Vorgang zwar langsamer werden, der Betrag der Geschwindigkeit kann jedoch auch gleich bleiben oder sogar zunehmen.

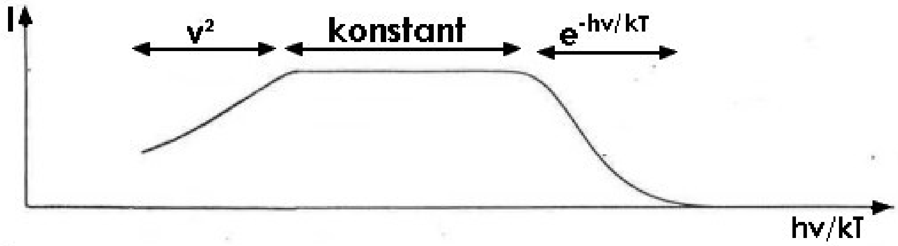
Bremsstrahlung kommt häufig vor, weil es im Weltall viele Elektronen und Ionen gibt. Besonders viele befinden sich im Plasma, deshalb geben Sterne und andere plasmahaltige Objekte auch besonders viel Bremsstrahlung ab.

Man kann die Formel für den Emmissionskoeffizienten (also der Stärke der Emission) der Bremsstrahlung ausrechnen, indem man statistisch die Wahrscheinlichkeiten für unterschiedliche Wechselwirkungen mit unterschiedlichen Teilchenbeschleunigungen betrachtet und auf diese Gleichungen die Larmorformel anwendet. Dabei spielen neben klassischen Wechselwirkungen auch Prozesse aus der Relativitätstheorie und der Quantenmechanik eine Rolle. Eine genaue Erklärung der Herleitung dieser Formel würde den Rahmen dieses Skriptums sprengen. Diese Formel lautet:

$$j_\nu = g(\nu, T)Z^2\frac{n_i n_e}{\sqrt{T}}e^{-\frac{h\nu}{kT}} \tag{1.7}$$

In dieser Formel steht j_ν für den Emmissionskoeffizienten, Z für die Ladung der Ionen, n_i für die Dichte der Ionen, n_e für die Dichte der Elektronen, ν für die Frequenz, T für die Temperatur, k für die Boltzmannkonstante und h für das Planck'sche Wirkungsquantum.

Der Gauntfaktor g(ν,T) ist ein sogenannter Modifikationsfaktor. Das heißt, er kann mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten unterschiedliche Werte annehmen, wobei die Wahrscheinlichkeit der Werte von der Frequenz und der Temperatur abhängt. Welchen Wert der Gauntfaktor konkret annimmt, ist rein zufällig und vor dem Vorgang nicht vorhersagbar.



In dieser Graphik sind mit Absicht weder für die Intensität, noch für die andere Achse, die eine Kombination aus Temperatur und Frequenz darstellt, genaue Werte aufgetragen, weil diese vom Gauntfaktor abhängig sind. Mann kann jedoch allgemein feststellen, dass die Intensität proportional zu ν^2 zunimmt, wenn der Quotient aus Frequenz und Temperatur sehr klein ist und mit dem Faktor $e^{\frac{-h\nu}{kT}}$ abnimmt, wenn der Quotient sehr groß wird. Bei durchschnittlichen Frequenzen und Temperaturen ist die Intensität der Bremsstrahlung frequenz- und temperaturunabhängig.

Gyroemmission

Gyroemmission tritt dann auf, wenn Elektronen von einem Magnetfeld durch seine Lorentzkraft abgelenkt werden. Das passiert nur, wenn diese Elektronen nicht an einen Atomkern gebunden sind, weil dessen Kraft stärker als die Lorentzkraft des Magnetfeldes wäre. Ähnlich wie die Planeten im Gravitationsfeld kreisen die Elektronen zunächst im Magnetfeld. Da es sich bei einer Kreisbewegung stets um eine beschleunigte Bewegung handelt, strahlt das Elektron auch stets Energie ab.

Die Energie, die das Elektron beim Erzeugen der Strahlung verliert, gleicht es aus, indem es im Magnetfeld weiter nach innen fällt. Wie das Gravitationsfeld und jedes andere Zentralfeld hat auch das Magnetfeld einen Potentialtopf, bei dem die Elektronen Energie gewinnen, wenn sie näher zum Zentrum kommen. Deshalb gehen die Elektronen in Form einer Spirale nach innen. Der Vorgang ist beendet, wenn die Elektronen im Zentrum des Magnetfeldes ankommen. Dann werden sie nicht mehr beschleunigt und geben daher auch keine Strahlung mehr ab.

Sowohl Magnetfelder, als auch ungebundene Elektronen kommen im Universum häufig vor. Daher gibt es eine Vielzahl von Objekten, die Gyroemmission aussenden: Galaxiehaufen, galaktische Kerne, Sterne, Supernovaüberreste, interstellares Gas und kosmische Strahlung geben alle Gyroemmission ab.

Um auszurechnen wie lange das Elektron strahlt (τ), muss man die kinetische Energie, die das Elektron am Anfang hat (ϵ), durch die Abstrahlungsleistung, die das

Elektron pro Sekunde abgibt (Q_r), dividieren

$$\tau = \frac{\epsilon}{Q_r} \tag{1.8}$$

Zyklotronstrahlung

Wenn die Elektronen nur wenig Energie haben, lassen sich die relativistischen Effekte vernachlässigen und man kann mit den Gesetzen der klassischen Mechanik rechnen. In diesem Fall spricht man von Zyklotronstrahlung. Die Zyklotronstrahlung ist beispielsweise für die Sonnenflecken in der Sonnenkorona, hochfrequente Radiostrahlung von Flaresternen und die Strahlung der Pole von Neutronensterne berechnen.

Klassisch betrachtet lassen sich die Bahnen der Elektronen ähnlich ausrechnen, wie die Bahnen der Planeten. Wir können also wie gewohnt das Kräftegleichgewicht benutzen und die nach innen wirkende Lorentzkraft mit der nach außen wirkenden Fliehkraft gleichsetzen.

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{q}{c} vB \tag{1.9}$$

Diese Formel kann man nach dem Radius (man nennt in Gyroradius) umstellen und erhält dadurch

$$r = \frac{mvc}{qB} \tag{1.10}$$

Durch Einsetzen der Umfangformel des Kreis $2r\pi$ in die Geschwindigkeitsformel $t = sv$ erhält man

$$t = 2r\pi v \tag{1.11}$$

Wenn man für den Radius die Formel (1.11) einsetzt, erhält man die Periodendauer

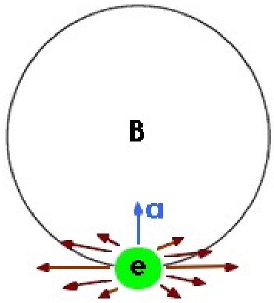
$$P = \frac{2mc\pi}{qB} \tag{1.12}$$

Bei der Zyklotronstrahlung ist es üblich, nicht die Periodendauer, sondern die Kreisfrequenz (also die zurückgelegten rad pro Sekunde) auszurechnen. Dafür nimmt man zuerst den Kehrwert, um auf die Frequenz in Umdrehungen pro Sekunde zu kommen. Dann multipliziert man mit 2π um die Kreisfrequenz in rad pro Sekunde zu berechnen.

$$\Omega_r = \frac{qB}{mc} \tag{1.13}$$

Die Beschleunigung einer Kreisbewegung geht immer in Richtung Mittelpunkt. Folglich emmitiert das Elektron keine Strahlung in Richtung Mittelpunkt. Die meiste

Strahlung emmitiert es tangential auf die Kreisbahn.



Synchotronstrahlung

Wenn die Elektronen viel Energie haben, muss man zusätzlich zu den klassischen Effekten auch noch relativistische Effekte (Lorentzkontraktion vom Radius, Masseninvarianz der Elektronenmasse) betrachten. Man spricht in diesen Fällen von Synchotronstrahlung.

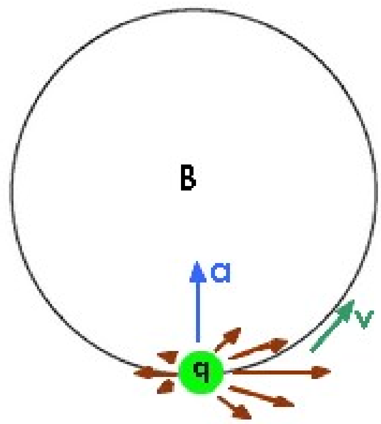
Sie kommt beispielsweise bei Supernovaüberresten mit Pulsaren wie dem Krebsnebel, bei Jets von Galaxiezentren und bei der kosmischen Strahlung vor. Die Synchotronstrahlung unterscheidet sich in einigen Punkten von der Zyklotronstrahlung:

Ein Unterschied ist die Abstrahlungsleistung, weil man für deren Berechnung bei der Synchotronstrahlung die relativistische statt der klassischen Larmorformel verwenden muss. Man kommt dabei auf die Formel

$$Q_r = \frac{2q^4}{3m^2c^3} B^2 \beta^2 \gamma^2 sin^2 \psi \tag{1.14}$$

In dieser Formel ist Q die Strahlungsleistung, q die beschleunigte Ladung, m die Masse der Ladung, c die Einsteingeschwindigkeit, B die Stärke des Magnetfeldes, β und γ die beiden Lorentzfaktoren und ψ der Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor der Ladung und dem Magnetfeldvektor. Man erkennt, dass die Strahlung mit der Masse ab und mit der Ladung und der Stärke des Magnetfeldes zunimmt.

Auch die Richtungsabhängigkeit muss man jetzt von der relativistischen Larmorformel übernehmen, sodass auch die Drehrichtung eine Rolle spielt.



In den meisten Fällen handelt es sich bei der Ladung um Elektronen. In diesen Fällen kann man in die Formel 1.14. für die Masse die konstante Elektronenmasse und für die Ladung die konstante Elektronenladung einsetzen. Die Geschwindigkeit der Elektronen ist nur von der Stärke des Magnetfeldes abhängig, so dass man auch für das Verhältnis zwischen B^2 und v^2 (im Lorentzfaktor β) eine Konstante einsetzen kann. In β bleibt jetzt nur noch die ebenfalls konstante Lichtgeschwindigkeit über. Wenn man alle Konstanten in die Formel einsetzt, vereinfacht sie sich zu

$$1.6x10^{-15}\gamma^2 sin^2\psi \tag{1.15}$$

Die Formel für die Gyrofrequenz (1.13) verändert sich zu

$$\Omega_r = \frac{qB}{mc\gamma} \tag{1.16}$$

Gyrosynchrotronstrahlung

Die Gyrosynchrotronstrahlung ist ein Mittelding zwischen Synchotron- und Zyklotronstrahlung: Wenn man sie genau ausrechnen möchte, muss man die relativistischen Effekte einbeziehen, aber wenn man nur an wenigen Nachkommastellen interessiert ist, genügt es, die klassischen Formeln zu verwenden. Ein Beispiel für Gyrosynchrotronstrahlung sind beschleunigte Elektronen in solaren Flares.

Linienstrahlung

In der klassischen Mechanik ist man davon ausgegangen, dass die Elektronen um den Atomkern kreisen. Die Kreisbewegung ist jedoch eine beschleunigte Bewegung, das würde bedeuten, dass die geladenen Elektronen immer Strahlung abgeben. Würde das stimmen, ginge den Elektronen schnell die Energie aus und sie würden in den Atomkern stürzen.

Das ist ganz offensichtlich nicht passiert. Um das zu erklären benötigt man die Quantenmechanik. In der Quantenmechanik kreisen die Elektronen nicht auf ihrer

Umlaufbahn, sondern springen auf dieser hin- und her. Dabei haben die Elektronen auch die Möglichkeit auf andere Umlaufbahnen zu springen. Nur in diesen Fällen geben sie Energie ab. Man spricht dann auch von Linienstrahlung. Diese Strahlung wird im nachfolgenden Skript noch ausführlicher erläutert.

2 Extinktion

Die Extinktion kommt dann zustande, wenn die Photonen mit den Atomen des extinktierenden Materials zusammenstoßen. Man kann sich jetzt fragen, in welchen Fällen die Photonen überhaupt zusammenstoßen, schließlich sind die Photonen Punktteilchen und haben daher keine Ausdehnung.

Was es jedoch schon gibt, ist ein Bereich um diesen Punkt, in dem ein Stoß ausgelößt wird, falls ein Teilchen an diesem Bereich ankommt. Diesen Bereich bezeichnet man als Wirkungsquerschnitt (σ). Er ist kugelförmig, folglich berechnet sich sein Flächeninhalt

$$\frac{8r^2\pi}{3} \tag{2.1}$$

Den Radius dieser Kugel bezeichnet man als klassischen Elektronenradius. Er beträgt 2,8 x 10^{-13}cm. (Genau genommen ist das kein klar abgegrenzter Bereich sondern die Stoßwahrscheinlichkeit wird in Richtung Rand kleiner).

Wir nennen die Zeit, wie lang es durchschnittlich dauert, bis ein bestimmtes Photon mit irgendeinem Materieteilchen kollidiert, mittlere Flugzeit (τ_a) und den Weg, den es bis dahin zurücklegt mittlere freie Weglänge (l_a). Dabei gilt natürlich die Beziehung $l_A = v\tau_a$, wobei v die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Teilchens ist.

Wenn wir nicht nur ein Photon, sondern die Photonen des gesamten Lichtstrahls betrachten wollen, ist die Wahrscheinlichkeit für einen Zusammenstoß interessanter. Wenn die Wahrscheinlichkeit nur gering ist, schaffen es die meisten Photonen ohne Zusammenstoß durch das Material und das Material extinktiert nur wenig Licht. Wenn die Stoßwahrscheinlichkeit groß ist, kommen nur wenige Photonen durch das Material und es extinktiert viel Licht.

Nach der Zeit τ_a ist die Wahrscheinlichkeit eines Zusammenstoßes 50%. Nach der doppelten Zeit ist die Wahrscheinlichkeit 75%, weil von den verbleibenden 50% wieder 50% zusammenstoßen (Es kommen also nur 25% dazu).

Diese Abnahme lässt sich als Differentialgleichung darstellen: Die Abnahme (Ableitung) der Teilchenzahl nach der Zeit τ_a entspricht der Hälfte der Teilchenzahl.

$$\frac{DN}{d\tau_a} = -0,5N \tag{2.2}$$

Durch lösen der Differentialgleichung erhält man

$$N(\tau_a) = Ce^{-0,5\tau_a} \tag{2.3}$$

Zum Zeitpunkt 0 wird die Exponentialfunktion 0, sodass nur noch die Integrationskonstante überbleibt. Wir können also für die Integrationskonstante die Teilchenanzahl zum Zeitpunkt 0 einsetzen.

$$N(\tau_a) = N_0 e^{-0{,}5\tau_a} \tag{2.4}$$

Um die Abnahme in Sekunden statt in τ_a anzugeben, muss man in die Formel statt τ_a die Anzahl der τ_a in einer Sekunde (also $\frac{1}{\tau_a}$) mal der Anzahl der Sekunden (t) einsetzen. Damit erhält man

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{0{,}5}{\tau_a}t} \tag{2.5}$$

Analog lässt sich das auch für den Weg ausrechnen:

$$N(s) = N_0 e^{-\frac{0{,}5}{l_a}s} \tag{2.6}$$

Den Term im Exponenten vor dem s nennt man auch Extinktionskoeffizient (k_ν). Er gibt an, ein wie großer Anteil der Photonen pro Meter extinktiert werden. Damit lässt sich die Formel vereinfachen zu.

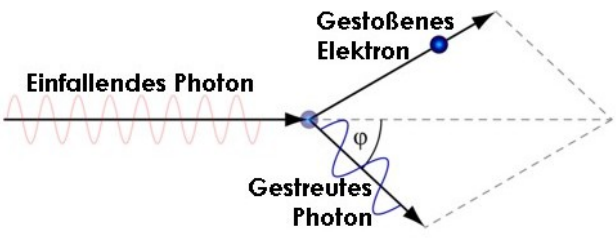
$$N(s) = N_0 e^{-k_\nu s} \tag{2.7}$$

Wenn die Dichte des Materials ortsabhängig ist, sind auch mittlere freie Weglänge und damit auch der Extinktionskoeffizient eine Funktion von x. In diesem Fall muss man den Extinktionskoeffizienten über infinidesimal kleine Ortsintervalle summieren, also die Funktion nach x integrieren. Statt der Formel 2.7. verwendet man in diesem Fall

$$N(s) = N_0 e^{\int_0^s -k_\nu(x)dx} \tag{2.8}$$

Comptonstreuung

Die Comptonstreuung ist eine spezielle Art der Extinktion, bei dem ein Teil des Lichts absorbiert und ein Teil des Lichts gestreut wird. Bei diesem Vorgang gibt das Photon einen Teil seiner Energie ab, um das Elektron aus dem Atom zu schubsen. Das Photon hat nachher weniger Energie und daher auch eine längere Wellenlänge. Es fliegt in eine andere Richtung weiter, weil es beim Stoß abgelenkt wurde. Das Elektron gibt, obwohl es aus dem Atom katapultiert und somit beschleunigt wurde, keine Strahlung ab, weil es die Energie zur Überwindung der Anziehungskraft des Atomkerns benötigt hat.



Inverse Comptonstreuung

Das Elektron, das bei der Comptonstrahlung aus dem Atom herausgestoßen wurde, kann wieder mit einem Photon zusammenstoßen. In diesem Fall gibt das Elektron Energie, die es nach dem Stoß als Bewegungsenergie gespeichert hat, an das Photon ab. Die Energie des Photons wird dabei höher und die Wellenlänge kürzer. Die Voraussetzung für diesen Vorgang ist, dass das Photon noch ausreichend Energie aufnehmen kann. Zu Beginn des Vorgangs gilt also

$$h\nu << mc^2 \tag{2.9}$$

Die Energie, die das Photon dabei gewinnt, kann man mit folgender Formel ausrechnen:

$$E_{Ende} = \frac{4}{3} E_{Anfang} (\frac{E_{e^-}}{m_{e^-} c^2})^2 \tag{2.10}$$

In dieser Formel bezeichnet E_{Anfang} die Energie des Photons am Beginn des Vorgangs, E_{Ende} die Energie des Photons am Ende des Vorgangs, E_{e^-} die Energie des Elektrons am Beginn des Vorgangs, m_{e^-} die Masse des Elektrons und c die Lichtgeschwindigkeit.

Thomsonsteuung

Die Thomsonstreuung funktioniert so ähnlich wie die Comptonstreuung. Der Unterschied ist, dass das Elektron nicht ausreichend Energie erhält um das Atom zu verlassen, sondern sich nur vom Atomkern wegbewegt.

Umwandlung eines Photons in ein Elektron-Positron-Paar

Eine weitere Möglichkeit für eine Extinktion ist, dass das Photon nicht nur Energie abgibt, sondern zur Gänze in andere Teilchen umgewandelt wird. Am häufigsten wird es dabei in ein Elektron-Positron-Paar verwandelt.

Sowohl das Elektron als auch das Positron als sein Antiteilchen haben eine Masse von $1m_e$. Zusammen haben sie also $2m_e$. Um auszurechnen, wie viel Energie das Photon benötigt, um ein Elektron-Positron-Paar zu erzeugen, verwendet man die Formel $E = mc^2$. Durch Einsetzen der Masse erhält man die Bedingung

$$E_{Photon} = 2m_e c^2 \tag{2.11}$$

Der Impuls von Elektron und Positron ist gleich groß und berechnet sich mit der Formel p=mv. Zusammen haben diese Teilchen also einen Impuls von

$$p = 2m_e v \tag{2.12}$$

Um das in Relation zur Energie zu setzen, formt man 2.12. nach der Elektronenmasse um und erhält

$$m_e = \frac{E}{2c^2} \tag{2.13}$$

Durch einsetzen von 2.13. in 2.12. erhält man

$$p = \frac{Ev}{c^2} \tag{2.14}$$

Für die Energie kann man die Formel $E = h\nu$ einsetzen und erhält

$$p = \frac{h\nu v}{c^2} \tag{2.15}$$

Den Impuls des Elektron-Positron-Paares kann man laut der Impulserhaltung mit dem Photonenimpuls gleichsetzen und erhält

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu v}{c^2} \tag{2.16}$$

Division der Formel durch $\frac{h\nu}{c}$ ergibt:

$$1 = \frac{v}{c} \tag{2.17}$$

Das würde bedeuten, dass die Geschwindigkeit des Elektrons und des Positrons gleich der Einsteingeschwindigkeit sein müsste. Das ist jedoch nicht möglich. Es muss daher ein drittes Teilchen geben, dass den restlichen Impuls aufnimmt.

Wenn das Magnetfeld sehr dicht ist, kann sich ein Elektron-Positron-Paar sogar durch die Wechselwirkung eines Photons mit einem Gammaquanten bilden, das heißt das dritte Teilchen muss nicht nur den Restimpuls des Photons, sondern zusätzlich noch den des Gammaquanten aufnehmen.

Das Elektron und das Positron gleichen sich kurz nach der Entstehung gegenseitig aus. Diesen Vorgang nennt man Annihilation. Bei diesem Vorgang wird Energie, die sogenannte Anihilationsenergie, frei. Diese wird in Strahlung investiert, die ungefähr 511 keV beträgt.

3 Strahlungstransportgleichungen

Insgesamt extinktieren und emmitieren alle Objekte Licht. Sterne extinktieren auch Licht, aber viel weniger als sie emmitieren und Gaswolken emmitieren auch Licht, aber viel weniger als sie extinktieren. Die Strahlungstransportgleichungen geben an, wie stark sich die Strahlung insgesamt verändert (Es fließt also sowohl die Emmission als auch die Extinktion ein). Um die Strahlungstransportgleichung aufstellen zu können, muss man zunächst eine einheitliche Beschreibung für Emmission und Extinktion aufstellen.

Emmission

Den Emmissionskoeffizienten (j_ν), also die Stärke der Emmission definiert man, indem man die Strahlung angibt, die das Material pro Volumselement und pro Zeitintervall erzeugt. Da wir mit der Strahlungsintensität rechnen wollen, beschränken wir uns auch auf ein infinidesimal kleines Raumwinkelelement und ein infinidesimal kurzes Frequenzintervall.

$$j_\nu = \frac{dE}{dVdtd\nu d\Omega} \tag{3.1}$$

Extinktion

Man hat entweder die Möglichkeit den Extinktionskoeffizient insgesamt, oder den Absorptions- und den Streuungskoeffizient extra zu beschreiben:

Den Absorptionskoeffizienten (κ_ν), also die Stärke der Absorption, definiert man, indem man angibt, welchen Anteil der Strahlung das Material, pro Wegintervall verschluckt.

$$\kappa_\nu = -\frac{dI_\nu}{I_\nu ds} \tag{3.2}$$

Das Vorzeichen der Absorption ist negativ, weil damit Strahlung verloren geht.

Der Streuungskoeffizient (σ_ν) ist analog definiert (Man gibt an, welchen Anteil der Strahlung das Material, pro Wegintervall ablenkt).

$$\sigma_\nu = -\frac{dI_\nu}{I_\nu ds} \tag{3.3}$$

Der Extinktionskoeffizient (k_ν) ist die Summe aus Absorptionskoeffizient und Streuungskoeffizient (Er gibt folglich an, welchen Anteil der Strahlung das Material extinktiert)

$$k_\nu = \kappa_\nu + \sigma_\nu \tag{3.4}$$

Optische Dicke

Die optische Dicke (τ_ν) gibt an, welcher Anteil der Strahlung insgesamt beim Durchlauf durch einen Körper extinktiert wird. (Im Gegensatz zum Extinktionskoeffizienten spielt also auch die Dicke des Materials eine Rolle). Um sie herzuleiten, kann man die Formel 2.7. verwenden. In diese Formel setzt man für den zurückgelegten Weg die Dicke des Materials ein, weil diesen Weg konnten die Photonen, die es durch das Material geschafft haben, zurücklegen. Für N(0) setzt man die sichere Wahrscheinlichkeit 1 ein, weil zu Beginn noch alle Teilchen da sind.

$$\tau_\nu = e^{-k_\nu s} \tag{3.5}$$

Für einen ortsabhängigen Extinktionskoeffizient setzt man die selben Größen in Formel 2.8. ein.

$$\tau_\nu = e^{\int_0^\infty -k_\nu ds} \tag{3.6}$$

Gesamte Strahlungsänderung

Möchte man wissen, wie stark sich die Strahlungsintensität (I_ν) beim Durchlauf durch ein Objekt pro Längeneinheit insgesamt ändert, muss man Emmission und Extinktion zusammenzählen. Den Extinktionskoeffizienten muss man dabei mit der Intensität multiplizieren, weil er ja nur den Anteil der Strahlung an der Intensität angibt.

$$dI_\nu = j_\nu + k_\nu I_\nu \tag{3.7}$$

Um die Änderung beim Durchlauf durch das gesamte Objekt anzugeben, muss man den Emmissionskoeffizienten mit der Länge des Weges multiplizieren und den Extinktionskoeffizienten durch die optische Dicke ersetzen:

$$dI_\nu = j_\nu s + \tau_\nu I_\nu \tag{3.8}$$

Ergiebigkeit

Wenn ein Objekt sehr dick ist, wird die Strahlung hinter dem Objekt fast zur Gänze verschluckt. Man sieht also nur noch die Strahlung, welche im Objekt selbst emmitiert wird. Diese sieht man nicht zur Gänze, weil das Objekt auch seine eigene Strahlung extinktiert. Die Strahlung die man in diesem Fall durch das Objekt erhält, nennt man Quellfunktion oder Ergiebigkeit (S_v)

Die Strahlung die der Körper erzeugt, entspricht an jeder Stelle dem Emmissionskoeffizienten j_ν. Möchte man wissen, wie viel von der an dieser Stelle erzeugten Strahlung nach außen dringt, muss man das mit der optischen Dicke zwischen dem Punkt und dem Rand multiplizieren.

$$j_\nu \tau_\nu = j_\nu e^{-k_\nu s} \tag{3.9}$$

Um nicht nur die Strahlung, die uns von einem Punkt des Körpers erreicht, sondern die gesamte Strahlung auszurechnen, muss man das über die gesamte Dicke des Objekts integrieren. Da das Objekt so dick ist, dass uns vom Ende des Materials kein Licht mehr erreicht, und dadurch j_ν und damit die gesamte Funktion vor dem hinteren Ende 0 wird, kann man das Integral zwischen 0 und ∞ nehmen

$$S_\nu = \int_0^\infty j_\nu e^{-k_\nu s} ds \tag{3.10}$$

Durch bilden der Stammfunktion und Einsetzen der Integrationskonstanten erhält man mit der Annahme das Emmissions- und Extinktionskoeffizient konstant sind

$$S_\nu = \left. \frac{j_\nu e^{-k_\nu s}}{-k_\nu} \right|_0^\infty = \frac{j_\nu}{k_\nu} \tag{3.11}$$

4 Thermodynamisches Gleichgewicht

Wenn sich ein Körper im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, ist die Temperatur an jeder Stelle gleich hoch. Folglich muss an jeder Stelle gleich viel Strahlung emmitiert und extinktiert werden (Wenn an einer Stelle mehr Strahlung emmitiert würde, wäre die Temperatur dort durch die zusätzliche Strahlung größer, wird an einer Stelle mehr Strahlung extinktiert, wird dort die Temperatur kleiner). Die meisten Körper befinden sich näherungsweise im thermodynamischen Gleichgewicht.

Da Emmission und Extinktion gleich groß sind, ist der Quotient aus Absorptions- und Extinktionskoeffizient ($B_\lambda = \frac{j_\lambda}{k_\lambda}$) bei jeder Wellenlänge nur von der Temperatur abhängig. Diese Abhängigkeit wird durch die Kirchhoff-Planck-Funktion angegeben

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc}{\lambda^3} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1} \tag{4.1}$$

Durch Einsetzen der Beziehung $\nu = \frac{c}{\lambda}$ kann man dieselbe Formel auch in Abhängigkeit von der Frequenz angeben:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{4.2}$$

Für hohe Frequenzen oder niedrige Temperaturen wird der Faktor $e^{\frac{h\nu}{kT}}$ viel größer als 1, so dass man den 1er in der Formel vernachlässigen kann.

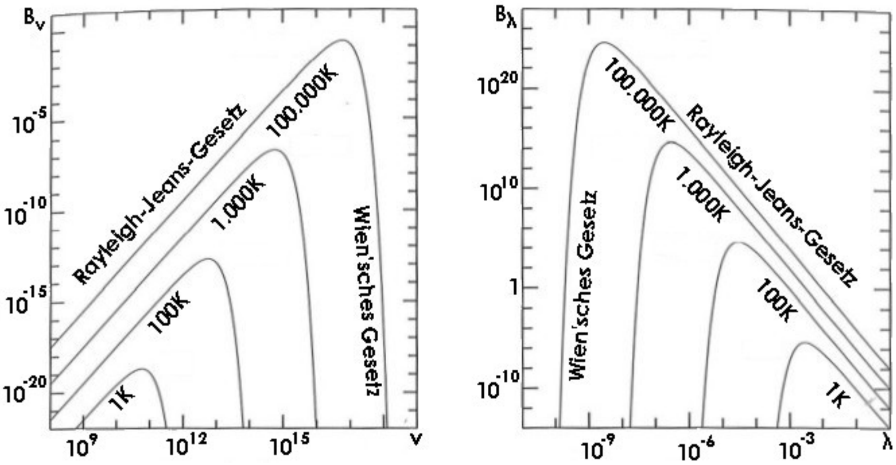
$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}} \tag{4.3}$$

Diese Näherung nennt man Wien'sches Gesetz.

Bei kleinen Frequenzen oder hohen Temperaturen passiert genau das Gegenteil: Der Faktor $e^{\frac{h\nu}{kT}}$ ist viel kleiner als 1 und kann deshalb selbst vernachlässigt werden.

$$B_\nu(T) = -\frac{2h\nu^3}{c^2} \tag{4.4}$$

Diese Näherung nennt man Rayleigh-Jeans-Gesetz.



In dieser Graphik wird die Kirchhoff-Planck-Funktion bei ausgewählten Temperaturen dargestellt. Man erkennt, dass der Strahlungsstrom bei jeder Wellenlänge mit zunehmender Temperatur zunimmt. Diese Abhängigkeit wird durch das Stefan-Bolzmann-Gesetz beschrieben:

$$F_\nu = \sigma T^4 \tag{4.5}$$

wobei σ die Stefan-Boltzmann-Konstante (5,7 x $10^{-5} \frac{erg}{cm^2 sK}$) ist.

Für den Farbeindruck ist nur das Strahlungsmaximum von Interesse, da diese Strahlung die anderen, schwächeren Wellenlängen verdeckt. Hier erkennen wir in der Graphik, dass sich das Strahlungsmaximum mit zunehmender Temperatur bei einer immer kleiner Wellenlänge befindet. Das Wien'sche Verschiebungsgesetz beschreibt die Abhängigkeit der Wellenlänge mit der maximalen Strahlung von der Temperatur

$$\lambda_{max} = \frac{2900 \mu m}{T[K]} \tag{4.6}$$